Universidade de Lisboa

As estratégias e as dificuldades dos alunos do 7.º ano de escolaridade na resolução de tarefas que envolvam equações do 1.º grau.

Pedro Miguel Paulino Mateus

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pelo Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães e coorientado pelo Professor Doutor Pedro Jorge Freitas

2018

Agradecimentos

Este trabalho é o culminar de muitos anos de estudante. O realizar de um sonho que vem desde muito pequeno, e que sem cada uma das pessoas que foi passando pela minha vida não teria o mesmo significado.

Começo por agradecer ao meu orientador Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães, não só por toda a disponibilidade demonstrada, mas também por toda a compreensão que teve comigo e pelo espaço que me deu ao longo de todo este tempo. Sei que muitas vezes esperava um pouco mais de mim, e que nem sempre correspondi às expectativas, mas vejo que conseguiu levar o barco a bom porto. Obrigado por tudo o que fez por mim e pelo magnífico professor que é.

Agradeço também ao meu coorientador Professor Doutor Pedro Jorge Freitas, pela prontidão com que me ajudou e pela boa disposição e confiança que sempre soube transmitir. Sempre que esteve presente soube transmitir as suas ideias da melhor maneira, permitindo que cada um evolua ao seu próprio ritmo.

Um agradecimento à Escola Padre Alberto Neto, pela possibilidade que me deu de trabalhar com jovens tão espetaculares como a turma sobre a qual incidiu o meu estudo.

Ao Professor Paulo Alvega pelo enorme exemplo que foi para mim. Pela disponibilidade e pela opinião sempre pronta e direta. Pela boa disposição natural, pelo seu sentido de humor único e pela maneira de ser e de estar junto dos alunos. Aprendi muito com a oportunidade que tive de assistir às suas aulas e poder apreciar como se pode fazer uma fantástica regulação da turma.

Ao meu colega, e amigo Hugo Almeida, que apesar de termos começado com o pé errado, penso que ficou entre nós um sentimento que nos une. Hoje, com algum tempo passado, vejo que tudo o que sempre quiseste foi ajudar-me. Obrigado por tudo! Do fundo do coração.

Aos restantes colegas de mestrado, que apesar de termos feitios tão diferentes, soubemos aproveitar cada momento que estivemos juntos para aprender um pouco uns com os outros. Eu pelo menos sei que aprendi muito com cada um de vós.

Um agradecimento para todas as pessoas especiais que tive ao longo deste meu percurso e que sempre puxaram por mim. Ao André e à Mónica, ao Cortez, à Sara e ao meu afilhado Gui, aos primos Tiago, Leninha e Inês, à Ana Sofia, ao Paulo e ao Kamisa, aos primos João e Diogo, ao Paulo Sebastião, ao Luís e à Marlise, ao primo

Nuno, ao mano Zé Pinto… A todos os meus amigos sem exceção! Se sou assim, a vocês e a todos os momentos que passámos o devo. Sei que nunca me deixarão desamparado.

À minha querida Filipa, por todos os serões que me foi aturando e por todo o carinho que me deu. Nos momentos mais difíceis estiveste sempre lá para me apoiar. Obrigado por tudo! Obrigado Dona Júlia pela força com o Arroz de Pato. Agora estou à espera.

Ao meu grande amigo Márcio por todo o tempo que tem perdido comigo (sim, porque esse já não o recuperas). Pela primeira oportunidade de trabalhar no que realmente gosto e sonho desde criança. E acima de tudo por seres um amigo tão fantástico.

Ao meu pai por tudo o que ele sempre me deu e significa para mim. Por toda a compreensão que teve em todos os momentos difíceis e por todas as festas nas melhores alturas.

À minha mãe por tudo! Por ser ela que leva com muitos dos meus amuos e das minhas zangas, e mesmo assim estar sempre pronta para mim. Pela sua sinceridade e por desejar tanto que este meu percurso termine. Por fazer tudo para que eu possa continuar a realizar os meus sonhos. Desculpa ter-te feito passar por tanto. Amo-te muito mãe!

Um agradecimento também ao meu mano grande. Por todas as noites que passámos juntos e por tudo o que me ensinaste. Por seres um mano tão espetacular e por seres o meu melhor amigo. Este ano tem tudo para ser memorável! Sei que grandes surpresas nos aguardam!

À minha gémea por todos os momentos hilariantes que temos tido nos últimos anos. Quem está à nossa volta quando estamos juntos tem de se sentir privilegiado por poder partilhar aquele momento connosco. Eu tenho realmente a sorte de ter a melhor gémea do mundo. Sempre disponível para me ajudar em todos os momentos, mesmo que não consiga fazê-lo. És a maior!!! Obrigado por tudo amorzinho!

Por fim, e porque os últimos são sempre os primeiros, à minha namorada Sofia! Ajudas em tudo, e neste percurso foste quem me fez voltar a acreditar em mim e nos meus sonhos. Obrigado por tudo o que fazes à minha vida!

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Resumo

No âmbito da Unidade Curricular de Iniciação à Prática Profissional IV, do Mestrado em Ensino da Matemática, tornou-se pertinente o desenvolvimento da temática “As estratégias e as dificuldades dos alunos do 7.º ano de escolaridade na resolução de tarefas que envolvam equações do 1.º grau”.

A Matemática estudada no 7.º ano de escolaridade engloba vários domínios, sendo este o ano em que os alunos dão um dos maiores e mais complicados passos nas suas aprendizagens nesta disciplina. Com a introdução da Álgebra e da sua linguagem simbólica, através das equações, esta temática é considerada por muitos alunos como uma das mais complexas, o que pode dificultar as suas aprendizagens.

As aulas da minha intervenção letiva decorreram ao longo de cerca de um mês, contemplando a interrupção letiva da Páscoa. Ao longo das aulas fui propondo a realização de várias tarefas a pares de carater problemático, de forma a permitir que os alunos trabalhassem os seus conhecimentos algébricos, tornando-os mais significativos e duradouros através do debate de ideias e resoluções com os seus colegas, ao mesmo tempo que procurava realçar a relação existente entre todos os domínios da Matemática.

A intervenção letiva integrou uma componente de estudo de cariz investigativo tendo como objetivo compreender como os alunos lidam com tarefas que envolvam equações, utilizando como questões orientadoras: que procedimentos os alunos utilizam na resolução das tarefas que envolvem equações, e que dificuldades os alunos revelam na resolução das tarefas sobre equações. Os resultados obtidos mostram que muitas das dificuldades que os alunos manifestaram vão ao encontro do esperado, sendo as dificuldades na tradução algébrica e na definição da incógnita as que mais sobressaíram. Relativamente às estratégias utilizadas na resolução de questões problemáticas, é de destacar a utilização dos princípios de equivalência por parte dos alunos, assim como a verificação dos resultados.

Palavra-chave: Álgebra, Equações, Resolução de tarefas, Estratégias e dificuldades dos alunos, 7.º ano de escolaridade

Abstract

Within the scope of the Curricular Unit, Iniciação à Prática Profissional IV, of the Master's in Mathematics Teaching, the development of the theme "The strategies and difficulties of 7th grade students in solving of tasks involving 1st degree equations".

Maths studied in the 7th grade includes several domains, with this being the year in which students give one of the largest and most complex steps in their learning in this subject. With the introduction of Algebra and its symbolic language, through equations, this theme is considered by many students as one of the most intricate, which may hinder their learning.

The classes regarding my intervention took place over one month, which included the Easter break holiday. Throughout the classes, I strived to perform several tasks in pairs of problematic character, in order to allow students to work their algebraic knowledge, making it more meaningful and lasting through the debate of ideas and resolutions with their classmates, trying, at the same time, to highlight the relationship between all of Maths domains.

The intervention included a research component with the objective of understanding how students deal with tasks involving equations, using as guiding questions: which strategies students use in solving tasks involving equations, and which difficulties students reveal in solving tasks with equations. The results show that many of the difficulties the students expressed are in line with what was expected, being that difficulties with algebraic translation and in defining of the unknown being the most prominent. Regarding the strategies used to solve problematic questions, it is important to highlight the use of the equivalence principles by the students, as well as the assessment of the results.

Keyword: Algebra, Equations, Problem solving, Strategies and difficulties of students, 7th grade

Introdução

A Álgebra é um dos campos da Matemática que oferece maiores dificuldades aos alunos. A sua linguagem e simbologia próprias muito abstratas fazem com que muitos dos jovens não a cheguem a compreender, o que leva frequentemente a que decorem os procedimentos para a resolução das tarefas propostas, ou então a desistirem, limitando-se a dizer "Eu não percebo nada de Matemática". Pior que estas duas hipóteses que os alunos colocam a si próprios, é o facto de isto acontecer tão precocemente no percurso escolar, sendo que, apesar de já ter sido trabalhado em anos anteriores, através, por exemplo, da proporcionalidade direta, é dada uma maior importância a este campo matemático a partir do 7.º ano de escolaridade, através das Equações de 1.º Grau.

Enquanto aluno recordo-me perfeitamente do momento em que aprendi a resolver equações do primeiro grau. Era para mim bastante simples, pois bastava ir mudando os 'números' de membro e trocar o sinal, de forma a isolar a incógnita num dos membros. Mas ao mesmo tempo que ia tomando posse destes procedimentos, muitas questões me iam inquietando, como por exemplo: "Mas o que é então mesmo uma equação? O que representa?", ou então, "Porque é que o professor dizia que o «x» era uma variável e agora passou a chamar-lhe de incógnita?". Mas, tal como todos os restantes colegas, limitei-me a memorizar o que fazer, pois apenas me interessava conseguir alcançar bons resultados.

Este estudo, apesar dos vários já realizados nesta área, terá uma importância muito significativa para o meu desenvolvimento enquanto futuro professor, pois acredito que é atravessando os desafios que nos vão sendo colocados pelos alunos que se torna possível uma maior evolução na lecionação das aulas. Sendo a Álgebra, mais concretamente as equações do 1.º grau, uma das temáticas de mais difícil compreensão por parte dos alunos, torna mais visível todo o trabalho desenvolvido pelos mesmos, deixando mais salientes as suas dúvidas e todo o processo que desenvolvem para conseguir alcançar os conteúdos necessários ao longo das aulas onde são trabalhados estes conhecimentos. Com isto, tona-se importante uma atenção redobrada por parte do professor, sendo muitas vezes necessário ajustar os ensinamentos às suas realidades.

A escolha do tema teve assim dois principais aspetos como motivação. Em primeiro lugar, e tendo em conta a minha experiência enquanto explicador, tinha a noção que este é um dos temas em que os alunos apresentariam maiores dificuldades, logo o desafio tornar-se-ia maior. A segunda razão foi o relembrar do que me acontecera enquanto aluno, e o facto de não querer que nenhum outro aluno acabe por deixar de gostar de Matemática por causa da Álgebra e das dúvidas e dificuldades não ultrapassadas que dela podem advir, pois a incompreensão de conteúdos tão importantes pode fazer com que muitos abdiquem de tentar alcançar esses conhecimentos. Com tudo isto, estou certo de que irei aproveitar o contributo que este estudo me trouxe para melhorar o meu futuro enquanto professor, tendo a noção de que passarei a ficar mais preparado para um ensino de um tópico tão importante, como é o caso das equações.

Problemática do estudo de cariz investigativo

A minha intervenção letiva incluiu também um estudo de cariz investigativo. Este estudo tem como objetivo compreender como os alunos do 7.º ano de escolaridade lidam com tarefas que envolvam equações, dando uma especial atenção às estratégias que utilizam e às dificuldades que apresentam na resolução das tarefas que envolvam equações do 1.º grau. De forma a conseguir responder ao objetivo estabelecido, decidi colocar algumas questões que serviram como guias da minha pesquisa: (1) que procedimentos os alunos utilizam na resolução das tarefas que envolvem equações; (2) e, que dificuldades os alunos revelam na resolução das tarefas sobre equações. Ao longo das duas semanas que durou a minha intervenção letiva tentei recolher o máximo de dados que me ajudassem a criar algumas conjeturas sobre as estratégias e dificuldades dos alunos, que são o alvo da minha reflexão.

Estrutura do relatório

Este trabalho é constituído por seis capítulos que se iniciam com a Introdução, onde está incluída a problemática que me proponho trabalhar. De seguida, vem o Enquadramento Curricular e Didático, capítulo onde apresento aspetos teóricos gerais sobre Álgebra, seguido de alguns pontos mais específicos e presentes no meu estudo, como são os casos das equações de 1.º grau e das dificuldades que os alunos tendem a sentir na sua resolução. Apresento depois um capítulo sobre o Contexto Escolar, no qual faço uma breve caracterização da turma que tive a oportunidade de acompanhar durante o ano letivo 2016/17, e na qual me foi dada a possibilidade de desenvolver esta minha investigação.

A Unidade Didática é o capítulo seguinte, e nele estão presentes os pontos sobre a ancoragem da unidade, onde enquadro no Programa de Matemática (MEC, 2013) os conteúdos que foram trabalhados ao longo das aulas e sobre a estratégia de ensino. Neste último ponto, apresento as metodologias de trabalho que decidi utilizar, as tarefas propostas e uma breve descrição das aulas lecionadas, destacando a criação das tarefas e o respetivo trabalho em aula em torno das mesmas. Ainda neste capítulo são apresentados os métodos e procedimentos recolha de dados, onde apresento os processos e os instrumentos de recolha de dados que irão ser o foco da minha análise no capítulo seguinte, Análise dos Dados Recolhidos, tendo em conta o objetivo e questões que me propus trabalhar.

Por fim, o sexto e último capítulo diz respeito à Reflexão, onde faço referência às minhas conclusões sobre o estudo e procuro salientar o quão importante foi para mim a experiência da lecionação. Seguem-se as Referências e os Anexos utilizados para desenvolver o trabalho.

Enquadramento curricular e didático

A evolução histórica da Álgebra

A Álgebra já é trabalhada desde a época dos babilónios e dos egípcios, sendo que um dos mais famosos e antigos documentos matemáticos é o Papiro de Rhind, documento esse que trabalha vários problemas que envolvem alguns aspetos algébricos e que data de 1650 a. C. Por esta altura, os métodos que eram utilizados tentavam apenas encontrar solução a problemas particulares, muitas vezes através de um outro campo da Matemática, a Aritmética, ao invés de se tentar chegar a generalizações.

Passados vários anos, os gregos iniciaram uma mudança nas soluções que encontravam, começando a ligar a Álgebra à Geometria. As manipulações geométricas que faziam permitiam que se chegasse à solução de equações quadráticas, ainda que apenas de alguns casos particulares.

Diofanto, matemático grego que é considerado o pai da Álgebra, foi o primeiro a introduzir um sinal especial a simbolizar a incógnita de uma equação, afastando-se da álgebra geométrica utilizada pelos seus conterrâneos. A sua forma de escrever as equações era muito diferente, utilizando uma linguagem "sincopada", isto é, abreviando algumas palavras na passagem da linguagem natural para a matemática.

Muitos outros matemáticos se destacaram desde então no domínio da Álgebra, como foi o caso de Brahmagupta, matemático indiano que ao longo do século VII desenvolveu o seu trabalho em redor da Álgebra, resolvendo equações quadráticas pelo método do completamento do quadrado e sabia que uma equação quadrática tem duas raízes, tornando-se num dos primeiros matemáticos a tentar encontrar generalizações nos seus métodos.

Mais tarde, já no final do século VII e início do seguinte, é al-Khwarizmi, matemático árabe, que dá origem à palavra Álgebra ao escrever o livro, *Al-jabr wa'l muqabalah*. Através da sua obra, deixando para trás a sincopação da linguagem utilizada pelos matemáticos anteriormente referidos, tentou encontrar formas canónicas de resolver equações lineares e quadráticas. Al-Khwarizmi e Diofanto são considerados os fundadores da Álgebra.

Os franceses François Viète e René Descartes foram também muito importantes para a evolução da linguagem utilizada no domínio da Álgebra, sendo que Viète foi o primeiro a utilizar letras para simbolizar as incógnitas, representando através de vogais quantidades constante e consoantes como incógnitas (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993), e posteriormente, Descartes decidiu começar a utilizar especificamente as últimas do alfabeto. É a partir deste momento que a Álgebra começa a trabalhar mais com letras, passando a dar uma maior importância à simbologia.

Destaque deve ser dado ainda a mais alguns nomes, não menos importantes para a evolução da Álgebra até a forma como a conhecemos, começando com Albert Girard, que afirma na sua obra que uma equação de grau n tem sempre n soluções complexas, passando por Lagrange, com as suas conhecidas fórmulas, e por Argand e Gauss, que conseguiram fazer uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Todas as suas descobertas levaram a uma profunda evolução da Álgebra.

Este domínio da Matemática começou a alterar o seu foco a partir de meados do século XIX, com os resultados encontrados por Abel e Galois relativos às equações de grau superior ao 4.º, dando início ao estudo da Álgebra Moderna, onde é dada uma maior importância aos conceitos de espaço vetorial, anel e grupo.

Simbologia e Expressões algébricas

Aquela que é considerada uma das maiores dificuldades dos alunos no domínio da Álgebra está ligada à simbologia que passa a ter novos significados, com a passagem da Aritmética para a Álgebra. Um dos símbolos que altera o seu significado é o “=”, que deixa de indicar uma ação, isto é, um cálculo que é necessário ser feito para se chegar a um resultado, e passa a referir uma condição, iniciando assim a procura pelo valor que dá sentido a essa mesma igualdade entre duas expressões numéricas (Chazan & Yerushalmy, 2003), uma em cada membro, sendo possível operar nos dois membros da equação (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Para que este tipo de dificuldade seja ultrapassado é preciso que se inicie o mais cedo possível a ensinar o sentido de símbolo aos alunos. A compreensão dos vários papéis que cada símbolo pode desempenhar, sendo diferente em cada contexto, fará com que os alunos compreendam que procedimentos devem tomar em cada situação. Por exemplo, os alunos devem compreender que numa função a letra “x” representa uma variável, ou seja, que pode tomar qualquer valor do seu domínio, enquanto que numa equação passa a representar uma incógnita, que deve ser descoberta, sendo ela a solução dessa mesma equação.

Caso os alunos tenham um bom sentido de símbolo passam a ser capazes de "… evidenciar relações, mostrar a generalidade ou fazer demonstrações." (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p.76). Noutros casos o sentido de símbolo levará a uma melhor compreensão dos alunos no domínio da Álgebra, fazendo com que as suas aprendizagens possam ser mais facilmente adquiridas, pois uma boa escolha de variáveis e dos símbolos pode tornar uma resolução de uma equação bastante simples, enquanto que se não houver esse cuidado, pode vir a tornar-se extremamente complexa. Segundo a análise de Arcavi, Ponte, Branco e Matos (2009), deve ser salientada ainda a importância da manipulação e interpretação de expressões algébricas, pois se for feita automaticamente, sem uma boa análise e compreensão das expressões, poder-se-á chegar a soluções que não sejam razoáveis nos respetivos contextos.

A Álgebra pode ser vista, segundo a pesquisa dos autores Ponte, Branco e Matos acerca dos estudos de Carolyn Kieran, sobre duas perspetivas, a processual e a estrutural. Os alunos que seguem uma perspetiva processual são aqueles que tentam encontrar no imediato os valores que dão sentido à igualdade representada numa equação, normalmente através da substituição da incógnita por vários valores, numa espécie de tentativa e erro. No caso contrário encontram-se os alunos que assumem uma perspetiva estrutural, trabalhando as expressões algébricas, simplificando-as e compreendendo as decisões e resoluções que vão fazendo. A passagem de uma perspetiva processual para a estrutural em Álgebra é um dos grandes desafios para o professor ao longo do 3.º ciclo, pois deve fazer com que os seus alunos sejam capazes de compreender os procedimentos que devem seguir em cada resolução.

Equações do 1.º grau

A resolução de equações do 1.º grau, faz parte do Programa Curricular (MEC, 2013) sendo uma das capacidades que os alunos devem ter adquiridas até ao final do 7.º ano de escolaridade, mas essa aprendizagem deve ser o mais cedo possível, tal como é defendido por Leitão e Cangueiro (s.d) relativamente a todo o campo da Álgebra, tornando possível que os alunos adquiram uma base mais consistente e tendo por base a compreensão, em vez da simples memorização de procedimentos (Devlin, 1998).

A compreensão do que é uma equação, ainda que sem o rigor que é pedido no 3º Ciclo, pode e deve ser um dos alvos dos professores logo desde os primeiros anos de ensino. Apesar de não terem a noção, ao tentarem encontrar valores para preencher espaços de forma a tornar a igualdade correta, como por exemplo em "1+__=7", os alunos já estão a dar os primeiros passos sobre o conceito de equação (Ponte, Branco & Matos, 2009; Vergnaud, citado por Sperafico & Golbert, 2011).

Ao longo dos anos, começam a deixar de estar simplesmente a colocar valores consecutivos até encontrarem a solução correta, e vão começando a pensar nas operações inversas, mesmo que não saibam que o estão a fazer. A utilização das letras de forma a representar a incógnita passará a ser algo muito mais simples de compreender, pois servirá apenas para preencher o espaço que antes estava em branco. As novas aprendizagens, ao serem ligadas às anteriormente adquiridas, acabam por se tornar mais significativas e duradouras, e ao notarem na ligação que há entre os vários conceitos torna a Matemática mais interessante para os alunos.

A compreensão da existência de uma incógnita é essencial para que os alunos apreendam melhor o conceito de equação. Segundo o Programa, uma equação deve ser vista como uma igualdade entre duas funções onde existe uma incógnita, que pode ser simbolizada por qualquer letra, apesar de se representar por "x" a maioria das vezes. O facto de se utilizar quase sempre o mesmo símbolo pode tornar-se também uma dificuldade para os alunos, caso tenham de lidar com outras letras como incógnitas.

Os princípios de equivalência têm um papel central para que seja possível que os alunos compreendam a resolução de equações. Tal como dito anteriormente, a mecanização dos procedimentos na resolução de equações não é desejável, pois a compreensão dos significados é muito importante para as aprendizagens dos alunos. O facto de se somar ou subtrair uma mesma quantidade a ambos os membros ou a multiplica-los ou dividi-los por um mesmo número, diferente de zero, torna bastante mais claro a equivalência existente entre as equações que vão sendo escritas do que no caso em que simplesmente é mecanizada a ideologia de "mudar de membro e trocar o sinal".

Um outro aspeto que começa a ser trabalhado com as equações do 1.º grau está relacionado com a terminologia que deve ser referida, algo que torna a linguagem matemática única. O entendimento do significado de parte literal e de coeficiente, de equivalência, de 1.º e 2.º membros, de solução e de conjunto-solução, é de extrema importância para que os alunos consigam utilizar corretamente a linguagem matemática, algo que também se encontra saliente como sendo um dos objetivos do Programa Curricular.

Problemas

Um dos aspetos fundamentais no ensino da matemática é ensinar os alunos a pensar, e deve ser esse um dos principais objetivos de cada professor (Polya, 1967; Schoenfeld, 1996). Uma das melhores maneiras de colocar os alunos a trabalhar essa sua capacidade é através da resolução de problemas. Com esta ferramenta que são os problemas, os professores podem desenvolver vários aspetos nos seus alunos, como reforçar os conceitos básicos já apreendidos pelos alunos, motivar e criar uma relação mais positiva relativamente à Matemática, tal como é defendido por English e Silver (citados por Ponte & Henriques, 2013).

É fulcral que a resolução de problemas seja um dos principais focos no ensino da Matemática em Portugal, tal como já foi exposto noutros países, como por exemplo nos Estados Unidos da América, onde "o National Council of Teachers of Mathematics (1980), declarou que a resolução de problemas "devia ser o foco da Matemática escolar"" (Schoenfeld, 1996, p.1). Muitos assumem que a resolução de problemas é uma capacidade à qual apenas os alunos mais capacitados conseguirão chegar (Abrantes, 1989), mas a realidade é que se pode traduzir em muito mais que isso. É através dessa estratégia de ensino que muitos dos alunos mais limitados e desligados podem sentir-se mais motivados, tentando provar a si mesmo que têm mais capacidades do que imaginavam ter, e que bem trabalhadas, poderão fazer deles muito melhores alunos, tanto a Matemática, como a outras disciplinas.

Portanto, é importante compreender o que é realmente um problema. Segundo Kantowski (citado por Abrantes, 1989), enquanto que num exercício, os alunos têm presente tudo o que é necessário para a sua resolução, sendo simplesmente necessário realizar meros cálculos, nos problemas é bem diferente, pois não são fornecidos todos os dados necessários, como é o caso da estratégia que pode/deve ser implementada, de forma a chegar à solução.

A utilização de tarefas de caráter problemático pode trazer grandes vantagens às aprendizagens dos alunos, que através de exercícios não lhes será possível alcançar, ainda que também estes sejam necessários para que apreendam certos mecanismos importantes na Matemática. Por exemplo, os raciocínios matemáticos que têm de desenvolver para evoluir na tarefa que envolva problemas, até as discussões que surgem sobre as várias estratégias que podem ser utilizadas para resolver a mesma tarefa, comunicando entre si utilizando a linguagem matemática (Schoenfeld, 1996).

Mais concretamente, em relação à temática da Álgebra, Sperafico e Golbert (2011) afirmam que os problemas permitem aos alunos trabalhar a tradução algébrica de enunciados, e também na compreensão das regras utilizadas nas resoluções das equações, enquanto que Schoenfeld (1996) acrescenta ainda que as situações problemáticas permitem um trabalho de interpretação das soluções obtidas.

Dificuldades dos Alunos

Muitas das dificuldades que os alunos apresentam na resolução de equações advêm de uma má compreensão dos significados das expressões algébricas, sendo que o maior destaque vai para a continuação da utilização na Álgebra dos conceitos que utilizavam anteriormente na Aritmética. Tal como visto anteriormente, uma das dificuldades prende-se no papel desempenhado pelo sinal de igual, tornando-se agora num símbolo que realça a relação existente entre os dois membros da equação.

Um dos erros mais frequentes, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), é a adição de termos não semelhantes, algo que denota a importância de uma boa compreensão dos significados, como o de incógnita, e da utilização da terminologia correta. Outra das dificuldades prende-se com a compreensão do problema e da respetiva resposta que deve ser dada, pois com a falta de compreensão da incógnita e do seu significado, muitos alunos limitam-se a resolver a equação que lhe é enunciada, sem perceber se essa é, ou não, a sua resposta. Em ambos os casos, o professor pode dar alguns exemplos de forma a que os alunos compreendam o seu erro.

Uma outra das dificuldades está relacionada com a natureza da solução do problema. Caso enfrentem um problema impossível, isto é, para o qual a solução encontrada não faz sentido, os alunos confundem a classificação das equações, definindo, muitas vezes, uma equação possível e determinada como sendo impossível. Seguidamente é apresentada uma tabela (Tabela 1) com várias das dificuldades que os alunos apresentam na temática das equações, e que serão tidas em conta ao longo da minha análise.

Tabela 1 - Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau (Ponte, Branco e Matos, 2009)

Erro/Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma acção	$3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau	Interpretação de 4*y* como: – quatro "*y* 's"; – um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; – 4 + *y* por analogia com $3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$	Booth, 1984
Uso de parêntesis	$3(x+2)=7x$ $\Leftrightarrow\ 3x+2=7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorrecta de termos semelhantes	$-2x+5x=8 \Leftrightarrow -7x=8$	Kieran, 2006
Adição incorrecta de termos não semelhantes	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow 7x=9$	Kieran, 1985

Transposição incorrecta de termos	$16x - 215 = 265 \Leftrightarrow 16x = 265 - 215$ $30 = x + 7 \Leftrightarrow 30 + 7 = x$ $3x + 5 = 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + 5$ $7x = x + 8 \Leftrightarrow 7 - 8 = x + x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (*Redistribution*)	$-2x + 5 = 8 \Leftrightarrow -2x + 5 - 5 = 8 + 5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x - 3 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2x - 4$	Kieran, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	$6x = 24 \Leftrightarrow 6 + x = 24$ $11x = 9x = \frac{11}{9}$ $2x = 4 \Leftrightarrow$ $i)\ x = 4 - 2\ ;\ ii) x = \frac{4}{-2}\ ;\ iii) x = \frac{2}{4}$ $- x = -17 \Leftrightarrow$?? $- x = 4 \Leftrightarrow$??	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

Contexto Escolar

O estudo apresentado no presente trabalho foi realizado na Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto, que pertence ao Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas. À data do último projeto educativa da escola, em março de 2013, haviam 2408 alunos, dos quais a maioria, cerca de 52%, pertenciam à Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto.

A turma na qual eu fiz a minha intervenção letiva, e consequentemente a respetiva investigação, foi a turma 7.º D. Esta turma é formada por 29 alunos, 15 rapazes e 14 raparigas, com idades compreendidas entre os 11 e os 13 anos, no início do ano letivo, notando-se uma grande heterogeneidade, tanto de género, como de nacionalidades. Relativamente ao percurso escolar dos alunos, existem 13 alunos que ficaram retidos pelo menos por uma vez, sendo que houve 2 que reprovaram duas vezes.

No início do ano foi realizado um pequeno questionário para que fosse possível tomar conhecimento das realidades dos alunos. Através das respostas que são apresentadas pelos alunos, saliento que a realidade socioeconómica dos alunos é de uma classe média-baixa, existindo 7 alunos que são de famílias monoparentais, e 8 que habitam em conjunto com pelo menos 4 familiares.

Enquanto que apenas 9 pais dos alunos possuem o 9.º ano de escolaridade ou um grau mais elevado, sendo de destacar que existem 3 que possuem Cursos Superiores, o número de mães que têm pelo menos o 9.º ano é de 17, e apesar de serem apenas duas as licenciadas, há 9 que concluíram o Ensino Secundário. De destacar também que existem 3 alunos que têm irmãos licenciados, algo que me parece ser muito importante, pois são bons exemplos para os mais jovens. Os Encarregados de Educação são, na maioria dos casos, muito preocupados com a educação dos filhos, sendo que alguns contactam frequentemente a Diretora de Turma, pois o facto de ser uma turma muito barulhenta deixa alguns pais muito preocupados.

Ao longo do tempo, e através da prática letiva supervisionada, fui reparando em algumas particularidades da turma 7.º D. A participação constante, por vezes até quando não solicitada, de alguns elementos da turma contrastava com a inércia de outros. No entanto, após algumas conversas e debate de ideias e opiniões com o professor Paulo Alvega, orientador cooperante da escola, e com o meu colega Hugo Almeida, percebi que o desejo de aprender Matemática era algo demonstrado por uma grande parte da turma, inclusivamente por alguns dos alunos com mais dificuldades e com um comportamento mais irregular.

Segundo uma breve análise dos Conselho de Turma de final de cada um dos períodos, aos quais tive a possibilidade de assistir, e tendo em conta os comentários que fui ouvindo de cada um dos docentes das várias disciplinas, verifiquei que a turma é muito heterogénea. Há 2 alunos que têm necessidades educativas especiais, por diferentes razões, que acabaram por ser muito bons exemplos perante o seu sucesso às várias disciplinas. Os comportamentos irregulares de alguns dos alunos foram constantes, sem haver, na maioria dos casos, grandes melhorias. Isto levou a que a turma fosse apelidada por alguns professores como "uma das piores turmas a nível de comportamento no 7.º ano" e a que fossem levantados alguns processos disciplinares. De salientar que 5 alunos foram encaminhados para o serviço de psicologia da escola, todos eles devido a comportamentos indesejáveis, tanto dentro como fora da sala de aula. Um outro aspeto em que a turma demonstra grande diversidade diz respeito aos resultados obtidos:

- No 1.º período verificou-se que 13 alunos obtiveram a classificação 2 em pelo menos 3 disciplinas, existindo até um aluno que teve essa mesma classificação em 10 disciplinas. Por outro lado, houve 3 alunos no quadro de honra e outros 9 que não tiveram qualquer resultado negativo;
- No 2.º período houve 12 alunos com classificação negativa a 3 ou mais disciplinas, apenas menos 1 do que no período anterior. Houve uma pequena melhoria nos restantes casos, sendo que 4 passaram a estar no quadro de honra e 8 a não ter qualquer nota negativa;
- No 3.º período houve uma melhoria significativa nas classificações — passaram a ser 7 os alunos que obtiveram resultados negativos a 3 ou mais disciplinas (6 deles acabaram por não passar para o 8.º ano). Neste aspeto é importante salientar que o Conselho de Turma decidiu alterar as notas de 2 dos alunos, reduzindo o seu número de negativas, o que fez com que pudessem transitar para o ano seguinte. Quanto às notas mais altas, passaram a ser 8 os alunos que entraram no quadro de honra da escola, mais 4 do que no período anterior, e outros 5 não tiveram qualquer classificação negativa.

Relativamente à disciplina de Matemática nota-se que, através da sua participação e empenho na resolução das tarefas propostas, os alunos tentam ultrapassar as suas dificuldades. Apesar do facto de tantos alunos terem começado com resultados baixos, isso não foi impeditivo para que conseguissem melhorar. O método de trabalho do professor de Matemática, algo a que não estavam habituados e pelo qual eu me tentei guiar, tornou a disciplina mais interessante e fez com que os alunos sentissem que estavam a tirar um maior proveito através dele, tal como foi destacado por alguns jovens nos momentos de autoavaliação.

Os métodos de regulação da turma utilizados pelo professor foram sempre muito ajustados, dos quais destaco a tabela de autoavaliação de comportamento que forneceu aos alunos mais problemáticos ainda durante o 2.º período letivo. A tabela era preenchida para todas as aulas e no final de um certo número de aulas, e com correção dos pontos com que o professor não concordava, levariam para casa para que o encarregado de educação tivesse sempre conhecimento do que ia acontecendo na aula de Matemática. De salientar que esta inovadora ideia acabou por ser implementada, após sugestão em Conselho de Turma, em algumas das outras disciplinas em que os comportamentos também não eram os mais desejáveis.

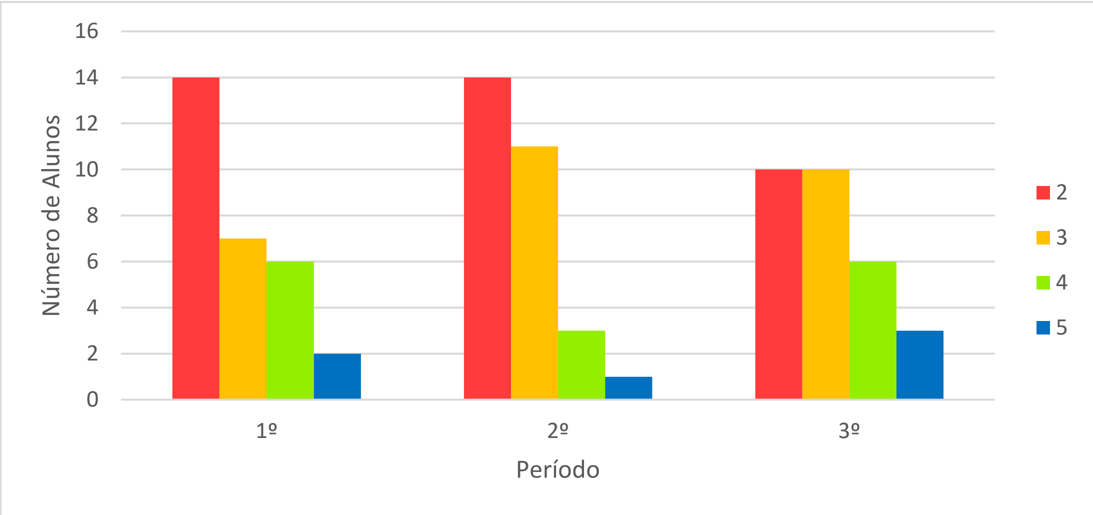


Figura 1- Classificações de Matemática

Como se pode verificar na Figura 1, as classificações de Matemática sofreram grandes alterações em todos os períodos. No 1.º período, praticamente metade dos alunos teve uma nota negativa, sendo de salientar que houve dois alunos que, apesar de estarem a trabalhar com um professor novo e que utiliza novas metodologias de ensino, tiveram a classificação máxima. Os alunos evidenciaram grandes dificuldades em algumas temáticas que deveriam ter sido bem assimiladas no final do 2.º Ciclo, como foi o caso das operações aritméticas, principalmente as que envolviam frações, o que obrigou o professor Paulo Alvega a ter o trabalho redobrado na fase inicial do ano.

No 2.º período, momento em que iniciei a minha intervenção letiva, é de salientar que o número de classificações negativas não sofreu qualquer mudança, e saliento a quantidade de alunos que desceram a nota de 4 para 3. O grau de exigência, tal como é natural acontecer, aumentou substancialmente, o que se fez sentir nas notas dos alunos.

Por fim, no 3.º período, altura em que acabei a minha intervenção letiva, evidenciou-se uma melhoria importante nas notas. Houve menos 4 classificações negativas, passando a ser 10, e destacou-se o aumento de classificações de 4 e de 5, sendo que, neste último período, só a Matemática, houve uma subida de 11 notas.

Unidade didática

Ancoragem da Unidade

O presente trabalho desenvolve-se em torno do ensino das equações. A Unidade que trabalha Equações encontra-se no Programa de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) no domínio da Álgebra do 7.º Ano. Seguindo a Planificação Anual da Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto, temos que o tema das Equações sucede às Figuras Geométricas, no caso os quadriláteros e as suas propriedades, que me foi muito útil na criação de tarefas, sendo que os assuntos matemáticos (conteúdos, tópicos e metas) trabalhados estão expressos na Tabela 2.

Tabela 2 - Planificação do Conteúdo das Equações na EBSPAN

Conteúdos	Tópicos	Metas
Equações: • Equações algébricas do 1.º grau a uma incógnita • Equações equivalentes • Princípios de equivalência • Equações numéricas • Equações lineares • Classificação de equações • Problemas envolvendo equações	• Equação definida por uma igualdade de funções (primeiro e segundo membro) • Compreender as noções de equação e de solução de uma equação • Identificar equações equivalentes • Princípios de equivalência de equações • Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução baseadas nos princípios de equivalência • Equações numéricas • Equações lineares (igualdade de duas funções afins) • Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema • Conceber e por em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados	ALG 7 (3.1 a 3.8 e 4)

O Programa de Matemática que está em vigor tem definidas um conjunto de Metas Curriculares relativas a cada um dos tópicos. Este programa tem como principal ponto de vista que a aprendizagem dos alunos seja estruturada e que se vá aumentando o grau de complexidade, tentando dar uma maior importância à progressão das aprendizagens dos alunos. Ao longo da minha prática letiva irei focar-me mais na resolução de problemas, tentando passar por vários dos conteúdos lecionados anteriormente, como por exemplo a utilização dos princípios de equivalência e a compreensão das noções de equação e de solução, de forma a que os alunos consigam esclarecer as dúvidas que possam ainda subsistir.

Relativamente aos objetivos curriculares que estão traçados para o ensino da Matemática no Ensino Básico, as tarefas propostas aos alunos visavam o desenvolvimento do raciocínio matemático, pois com tarefas que sejam interessantes e, ao mesmo tempo, desafiantes para os alunos, é possível que os jovens consigam formar algumas conjeturas sobre as formas de poderem chegar à solução. Para além disso, visavam também a comunicação matemática, tal como é referido no Programa (MEC, 2013. pp. 4-5):

> *"…deve-se trabalhar, com os alunos, a capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos, identificando as questões que levantam, explicando-as de modo claro, conciso e coerente, discutindo, do mesmo modo, estratégias que conduzam à sua resolução."*

Ainda no que se refere aos objetivos valorizei a resolução de problemas, pois permite o trabalho em redor da comunicação matemática, através das interpretações dos enunciados e do raciocínio matemático, convocando justificações, e também a interpretação dos resultados obtidos.

Apesar de ter perdido o destaque dado no Programa curricular anterior (ME, 2007) onde era tomado como uma das finalidades do ensino da disciplina, o gosto pela Matemática continua a ser descrito no atual Programa (MEC, 2013), sendo, na minha opinião, a resolução de problemas um ótimo meio para atingir esse mesmo fim. Se os alunos se sentirem desafiados pelas tarefas e conseguirem compreender a Matemática como um todo, sentir-se-ão naturalmente mais envolvidos e interessados nas maravilhas que a disciplina lhes pode oferecer.

Relativamente às Metas Curriculares (MEC, 2013), ainda que tente abordar alguns dos descritores que estão detalhados ao longo do tema das Equações (ALG7 – 3), o meu foco será a resolução de problemas (ALG7 – 4), sendo esse um dos objetivos gerais da Álgebra no 7.º ano.

Estratégia de Ensino

As estratégias de ensino adotadas ao longo da minha intervenção letiva têm em vista essencialmente dois objetivos que são sempre para mim fulcrais: o desejo de fornecer aos alunos materiais que lhes proporcionem novas aprendizagens, sendo estas significativas e duradouras, e o desenvolvimento do gosto pela Matemática, tal como é tratado tanto no antigo, como no novo programa curricular (ME, 2007; MEC, 2013). O primeiro objetivo é algo que penso que é o primeiro pensamento de todos os professores, pois quanto mais significativas são as aprendizagens dos alunos, mais longe é possível ir, e não há melhor sentimento que ver os alunos nesta progressão, abrindo-se assim uma porta para que o aluno aprenda por si mesmo. Pensando nisto, tentei colocar situações problemáticas nas tarefas que desenvolvi, para que os alunos pudessem ter uma aprendizagem mais ativa (Polya, 1967). O segundo aspeto é, na minha opinião, não só o mais importante, como é o mais difícil de concretizar. Não é fácil desenvolver o gosto pela Matemática, mas a necessidade de que os jovens passem a ver a disciplina com outros olhos foi algo que transmiti, no caso ao professor orientador deste estudo durante a entrevista feita no início para a entrada no mestrado, ao dizer-lhe que acreditava que a Matemática é algo bem mais divertido do que aquilo que se tem ensinado nas escolas.

Foi com estes objetivos, e tendo também em atenção as caraterísticas da turma, e de cada aluno que a constitui, os conteúdos que seriam lecionados, e, naturalmente, a problemática que me propus a estudar, que desenvolvi as tarefas que iriam fazer parte da minha investigação. Para que o ensino seja eficaz, as tarefas utilizadas devem ser desafiadoras para os alunos (NCTM, 2008), e o mais diversificadas possível, pois "A diversificação é necessária porque cada um dos tipos de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares" (Ponte, 2005, p. 17). Para que os alunos pudessem ver "a Matemática como um todo coerente" (MEC, 2013, p.5), e não como um conjunto de áreas que não estão interligadas, as tarefas que decidi propor englobam alguns dos conteúdos já trabalhados anteriormente nos diferentes domínios da Matemática, como são o caso da Álgebra, tema central do meu trabalho, da Geometria, tentando fazer a ligação aos tópicos trabalhados ao longo do ano, como os quadriláteros e as suas propriedades, as áreas e os perímetros das figuras, e os Números. Para além disso, procurei que as tarefas fossem motivadoras, algo que se verificou mais numas que noutras, ao mesmo tempo que ia percorrendo as metas curriculares selecionadas para este tema. Todas as tarefas produzidas acabaram por se revelar demasiado extensas, sendo que, em alguns casos, isso ocorreu devido ao interesse dos alunos em continuar a aprofundar e a procurar atingir novas aprendizagens. Prova disto, foi o que aconteceu na segunda aula com a tarefa O Triângulo, assunto que tratarei mais à frente. Entreguei ainda aos alunos um trabalho de casa no final da primeira aula da minha intervenção letiva, para que os alunos tivessem a possibilidade de apresentar as suas estratégias de resolução e pudessem assim evidenciar-se algumas das suas dificuldades.

A intervenção letiva foi programada para ocupar duas semanas de aulas, incluídas no 2.º e 3.º períodos letivos, pois era o momento em que estava planificado trabalhar as equações, através de alguns problemas, com os alunos. Incluiu quatro aulas de 90 minutos, às segundas e quartas-feiras, e duas de 45 minutos, realizadas à quinta-feira (Tabela 3).

Tabela 3 - Calendarização da intervenção letiva

	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sáb	Dom
Março	5	6	7 **A Álgebra na Geometria**	8 **O Triângulo**	9	10	11
	12 **A Álgebra na Geometria II**	13	14 Dia do Pi	15	16	17	18
	19 **F**	20 **É**	21 **R**	22 **I**	23 **A**	24 **S**	25
	27 **P**	28 **Á**	29 **S**	31 **C**	1 **O**	2 **A**	3
Abril	4 **Será que vais descobrir?**	5	6 **As Idades**	7 **Mini-Teste**	8	9	10

Decidi que todas as aulas da minha intervenção letiva continuariam a seguir o mesmo formato que as aulas do professor Paulo Alvega, tal como já tinha feito nas minhas intervenções ao longo do 1.º período, não só por já haver o hábito por parte dos alunos a esta maneira de trabalhar, mas principalmente porque acredito que é com o trabalho autónomo que os alunos conseguirão chegar a aprendizagens mais significativas e duradouras. Desta forma, as aulas tiveram sempre três momentos principais, sendo eles:

- Introdução da tarefa – foi neste momento que tentei esclarecer todas as dúvidas que foram surgindo, principalmente ao nível da linguagem presente na tarefa. Era também importante que os alunos se sentissem desafiados na resolução das tarefas, o que viria a tornar o momento seguinte mais produtivo. Por isso, fui levantando algumas questões, aproveitando as ideias que os alunos iam partilhando antes de começarem a trabalhar apenas com os seus pares, de modo a despertar alguma curiosidade dos alunos na resolução da tarefa;
- Trabalho autónomo – momento em que os alunos trabalharam em pares e, em princípio, sem interferência do professor. Com os alunos empenhados ao longo do tempo do trabalho autónomo, tive sempre o cuidado de tentar ir acompanhando as suas estratégias e esclarecer algumas dúvidas que iam surgindo. Aos alunos que não estavam a conseguir evoluir na tarefa, tentei levantar algumas questões que pudessem servir de alavanca para o seu trabalho. Enquanto isto, e porque este é o momento ideal para o fazer, ainda que nem sempre seja fácil, fui selecionando e sequenciando as resoluções que queria ver trabalhadas na discussão coletiva, não escolhendo apenas respostas corretas, mas tentando aproveitar também algumas das dificuldades que os alunos tinham, fazendo delas também uma forma de aprendizagem (Canavarro, 2011; ME, 2007);
- Discussão coletiva – este foi sempre o momento mais complicado de gerir, pois havia muitos alunos a querer participar e partilhar as suas resoluções. Ainda assim, penso que foi sempre uma parte muito importante da aula, pois ajudou os alunos a trabalhar a comunicação matemática e a negociação de significados, defendendo as suas estratégias e tendo a hipótese de comparar com outras ideias diferentes (Oliveira et al, 2012; Ponte, 2005).

Os enunciados das tarefas com os registos dos alunos foram recolhidos no final de todas as aulas, para posteriormente serem fotocopiados e entregues novamente aos alunos. Aproveitei o facto de os ter comigo para poder dar depois aos alunos algum retorno sobre o trabalho desenvolvido, tal como fiz com o trabalho de casa, tentando sempre alertar e corrigir alguns erros que ainda surgissem, e levantando algumas questões para que os alunos pudessem aprofundar a sua compreensão sobre os temas tratados. Através deste tipo de ações, e tal como é defendido pelo NCTM (2008), foi possível realizar um tipo de avaliação formativa, da qual pude retirar informações para mim, de forma a poder melhorar as minhas abordagens relativamente aos temas trabalhado, e para os alunos que, sem que sintam o peso de uma avaliação sumativa, tenham a possibilidade de sentir que é dada uma grande importância aos seus trabalhos e às suas resoluções, tornando-o no foco de cada unidade de ensino (Abrantes, 1985). Segundo Ponte (2005, p.1), "O que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam", e como tal, uma das obrigações do professor passa por conseguir criar o ambiente que promova essa atividade e subsequente reflexão por parte dos seus alunos. Para além deste tipo de avaliação formativa e constante NCTM (2008), decidi também criar um momento de avaliação sumativa, com a realização de um Mini-Teste, momento ao qual os alunos já estão habituados, pois foram feitos vários ao longo do ano.

Quanto à organização do trabalho dos alunos, defini que o melhor seria continuar com o trabalho a pares, organização que se tinha vindo a utilizar ao longo de todo o ano. É minha convicção que trabalho a pares tem um papel central nas aulas da turma, sendo que é através do diálogo e da partilha de ideias que os alunos vão conseguindo evoluir nas suas aprendizagens. Através do trabalho colaborativo com o seu parceiro, pois cada par recebe apenas um enunciado, é esperado que ambos se vão desafiando mutuamente, tentando chegar a uma resolução final o mais completa possível. A planta da sala foi sendo alterada, tal como costuma acontecer logo após cada teste de avaliação individual realizado pela turma. Estas mudanças têm em conta vários aspetos, como os resultados obtidos— cada aluno que tem uma boa nota passa a sentar-se ao lado de um aluno que tenha mais dificuldades — o comportamento dos alunos, grau de participação, e o género.

Tarefas

Na criação das tarefas tentei ligar a Álgebra a outras áreas da Matemática, nomeadamente a Geometria e os Números, de forma a mostrar a disciplina como um corpo que precisa de todos os membros para funcionar. Aproveitei para incluir vários aspetos que serviram como revisões para os alunos, como por exemplo as propriedades dos quadriláteros e a proporcionalidade direta, ao mesmo tempo que trabalhava esta temática que para a maioria dos alunos é muito complicada de compreender. Utilizei ainda alguns problemas tentando esclarecer algumas aprendizagens que tivessem ficado pouco claras para os alunos, criando algumas questões que se focaram principalmente na classificação de funções, os princípios de equivalência e os significados das incógnitas. Outro dos aspetos que tive em conta, visto que queria "agarrar" os alunos à Matemática que podia ser produzida nas aulas, foi o interesse que poderiam sentir na resolução das tarefas, tentando dar-lhes razões para se empenharam no trabalho que poderiam desenvolver. Desta forma, pretendo que as aprendizagens em Álgebra, particularmente as equações, se tornem mais significativas e duradouras, visto que é uma base importante para que se sintam mais preparados nos anos seguintes.

A Álgebra na Geometria

A tarefa "A Álgebra na Geometria" teve como principais objetivos que os alunos iniciassem a resolução de problemas com equações do 1.º grau, e criar desde logo uma ligação entre a Álgebra e uma das outras áreas da Matemática, no caso a Geometria. Tendo em atenção que o facto de ser esta a primeira tarefa em que os alunos trabalhavam com problemas que envolviam uma matéria que para eles não foi fácil assimilar, decidi que a tarefa seria o mais simples possível, vindo a aumentar o grau de dificuldade nas propostas que faria nas aulas seguintes.

A primeira das questões presentes na tarefa envolve um dos temas que a maioria dos alunos compreende relativamente à Geometria, que são os ângulos. Aproveitei os conhecimentos prévios dos alunos sobre esta temática, como é o caso das noções de ângulos reto, raso e giro, bem como de ângulos complementares e suplementares. A ideia passou por não guiar ou indicar aos alunos qualquer estratégia ou tipo de resolução, deixando que fossem eles mesmos a decidir o caminho que iriam percorrer. Em nenhum momento pedi aos alunos que utilizassem as suas aprendizagens sobre as equações ao longo da primeira questão, e esperava que o mais provável seria que utilizassem operações inversas. A inclusão das letras gregas Alfa, Beta e Teta foi propositada, de modo a dar a conhecer aos alunos as mesmas, uma vez que são as que normalmente se utilizam para nomear ângulos, e para que se habituem desde o início que qualquer letra pode simbolizar uma incógnita.

No caso da segunda questão, a ideia já foi mostrar aos alunos as potencialidades que as aprendizagens adquiridas relativamente às equações podem ter na resolução de problemas. Trata-se de um problema que envolve medidas, sendo que não está explícito, nem no enunciado, nem na figura, o comprimento de todos os lados de um terreno. Desde o início do problema que o aluno é levado a utilizar a medida de todos os lados, sendo que em dois deles deveria estar envolvida a mesma incógnita (x). Para que não fossem descritos todos os passos que o aluno deveria dar, pois nesse caso deixaria de ser uma situação problemática (Abrantes, 1989), as alíneas finais deixam de mencionar o caminho a seguir, sendo que o facto de os alunos terem dado os primeiros passos da questão utilizando a Álgebra, é de esperar que prossigam esse mesmo rumo. Como não se tratava de um polígono regular, no último item, onde era pedida a área do terreno, os alunos poderiam calculá-la da forma que quisessem, fazendo a divisão da figura como lhes fosse mais conveniente.

Trabalho Para Casa (TPC)

O TPC foi criado para ser proposto logo no final da primeira aula da minha intervenção letiva, e tinha como principal objetivo observar em que nível está a tradução algébrica de problemas por parte dos alunos, assim como fornecer-lhes uma possibilidade de trabalharem em casa o que ia sendo feito na aula. Coloquei 3 questões, de tipologia de resolução diferente, para dar novas ferramentas aos alunos, de forma a que se sintam preparados para uma qualquer tarefa que lhes seja proposta.

Todas as questões estão ligadas à última temática trabalhada antes da entrada na Álgebra que foi a Geometria, mais concretamente os quadriláteros e as suas propriedades. A primeira é uma questão de escolha múltipla na qual, sabendo a fórmula da área do papagaio, é simples calcular a medida da diagonal em falta, pois excede a diagonal menor em 40 centímetros. Assim, através de princípios de equivalência, os alunos devem conseguir chegar à resposta correta. Para além disto, os alunos devem prestar atenção às unidades de medida, e fazer uma correta passagem de centímetros para decímetros, ou de decímetros quadrados para centímetros quadrados.

A segunda questão inicia-se novamente com uma escolha múltipla e é necessário relembrar a fórmula da área de um trapézio, tendo a "rasteira" de aparecer já um pouco simplificada. Com isto, espero que os alunos consigam ter a perspicácia de relembrar a equivalência das equações, que foi trabalhada numa das últimas aulas. De seguida, pede-se que resolvam a equação, para a qual terão de voltar a utilizar os princípios de equivalência, e por fim pergunta-se qual é a medida do comprimento da base menor, para que a resposta ao problema não seja a solução da equação. Ao perceber que o comprimento da base menor dá um valor negativo, o aluno deve questionar-se e tentar perceber por si mesmo que um trapézio com aquelas medidas não pode existir, trabalhando assim o seu espírito crítico.

Finalmente, na questão 3, os alunos são confrontados com duas resoluções de um mesmo problema, tendo de dizer se estão corretas, ou não, comentando os erros que cada uma poderá ter. Com esta tarefa, os alunos terão de se relembrar das fórmulas das áreas do triângulo e do paralelogramo. Espero assim que os alunos voltem a trabalhar o seu espírito crítico e que coloquem em causa as resoluções que encontram, para que depois em aula, nos momentos de discussão coletiva, também o façam, enriquecendo o momento da aula em questão.

O Triângulo

A segunda proposta durante a minha intervenção letiva foi a resolução da tarefa intitulada "O Triângulo". Através desta tarefa, esperava que os alunos trabalhassem a sua comunicação matemática, pois previ que haveria um momento de discussão coletiva muito produtivo. Queria ainda que o espírito crítico dos alunos fosse chamado a intervir, dada a possibilidade de encontrar uma situação em que não estariam a falar de um triângulo, e que pudessem trabalhar alguns dos aspetos da Álgebra, como a utilização dos princípios de equivalência. Ao realizar-se numa aula de 45 minutos, tentei criar uma tarefa curta, mas plena de interesse para os alunos. Ao estarem a trabalhar com um triângulo e com as suas propriedades relativamente aos lados, pergunta-se se será possível que o triângulo seja equilátero. Ao longo da questão os alunos não seriam, mais uma vez, orientados de nenhuma maneira, deixando que as suas ideias emergissem durante o trabalho autónomo. A ideia não era que efetuassem cálculos muito difíceis, com equações muito complicadas, mas sim que os alunos pudessem ver que através de uma tarefa tão simples é possível querer ficar a saber e a conhecer sempre mais. A resolução desta tarefa poderia levar a aprendizagens muito importantes e em várias áreas, pois os alunos poderiam resolvê-la utilizando várias equações, trabalhando a Álgebra, mas uma delas levaria a uma das propriedades dos triângulos que, possivelmente, alguns alunos poderão não se relembrar, que é o facto de a soma das medidas do comprimento de 2 dos lados do triângulo ser maior que a medida do comprimento do terceiro lado. Para mostrar aos alunos tal propriedade foram levadas para a aula 3 pauzinhos de espetada com as medidas que estavam definidas no problema.

A realidade de o triângulo apresentado não poder ser equilátero, poderia levar os alunos mais interessados a quererem ver uma outra questão ser levantada, algo que ia preparado no meu plano de aula. E essa questão seria: Então e será que o triângulo pode ser isósceles? E se fosse possível, de quantas maneiras?

A Álgebra na Geometria II

A "Álgebra na Geometria II" volta a ser uma tarefa em que não se dirige os alunos para a resolução da mesma através das equações. Ao longo desta tarefa e das anteriores, o meu objetivo foi ver como os alunos traduziam o que está escrito nos enunciados para as suas resoluções, tendo utilizado para isso, alguns "problemas de palavras" (Abrantes, 1989), e não só, que me parecem muito importantes para as aprendizagens dos alunos. Através das quatro alíneas da tarefa, o acréscimo da dificuldade torna-se cada vez mais saliente, esperando assim que as dificuldades dos alunos se tornem mais evidentes na resolução desta tarefa. Nesta tarefa é também pedido que os alunos expliquem as suas resoluções, pois é importante que os alunos se habituem que devem dar uma resposta clara aos problemas que lhes são colocados.

Na alínea a), é perguntada a área de um quadrado do qual se sabe o seu perímetro. Apesar de o mais provável ser os alunos voltarem a utilizar apenas as operações inversas, também elas muito importantes na resolução de equações, este pareceu-me um problema interessante, para que os alunos ganhem uma maior noção das áreas e perímetros. De seguida, a b) volta a utilizar os perímetros, mas aqui aumenta a importância da atenção dos alunos para o enunciado, de maneira a fazerem uma boa tradução do problema. Apesar de ainda poderem utilizar apenas a mesma estratégia que na alínea anterior, ao colocar esta questão esperava que mais alunos já começassem a utilizar as equações na resolução dos problemas.

A partir da alínea c) eram casos diferentes, pois pensava que os alunos só conseguiriam chegar à resposta por tentativa e erro, ou utilizando os conhecimentos que vinham sendo trabalhados, isto é, as equações de 1.º grau. Na primeira delas, ainda que se trabalhe novamente com o perímetro, o facto de ser de um retângulo complica mais a resolução, visto que não é fornecida a medida de nenhum dos lados, sendo apenas expresso a relação que existe entre ambos. Embora sejam todos problemas que envolvem a Geometria, em nenhum deles é dada a figura de que se fala no respetivo enunciado, para poder ver se os alunos têm a necessidade de a fazer, ou sequer se se lembrariam disso, algo que nesta questão me parece muito importante.

Por fim, a última alínea era a mais complicada de todas, fazendo referência ao tema que antecedeu as equações, os quadriláteros e suas propriedades, sendo que o trapézio isósceles descrito no enunciado aparece na figura presente na folha dos alunos. Para além do trabalho com equações, pois para descobrirem a altura do trapézio tinham de encontrar a altura do triângulo, os alunos precisavam de conhecer também as regras de proporcionalidade direta, também já trabalhadas tanto no respetivo ano letivo, como no 6.º ano. Apesar de se tratar de um problema mais complicado, esperava que os alunos, mesmo que não conseguissem chegar à resposta, pudessem espelhar as suas ideias, promovendo o debate posteriormente na discussão coletiva.

Será que vais conseguir descobrir?

Ao criar a tarefa "Será que vais conseguir descobrir?", aproveitando a mudança do 2.º para o 3.º período, tentei focar uma nova ligação, fazendo com que a Álgebra se demonstre também no tema dos Números e Operações, tendo como principal foco a tradução algébrica de problemas. Queria tentar que os alunos ligassem mais à tarefa desde o início, fazendo-os sentir como sendo os criadores de um enigma que o seu colega tinha de resolver. Para tal, criei uma folha com alguns cálculos, presente nos Anexo 3, e entreguei uma das partes a cada elemento do par, sendo que cada um simplesmente tinha de escolher um número, ao acaso, e realizar as contas que estavam a ser pedidas. Desta forma, eles seriam parte do problema para o seu colega, tendo o seu parceiro de descobrir o número que escolhera. Com isto, tinha como objetivos ligá-los à tarefa desde o início e que todos eles tentassem participar, pois acreditava que o sentimento da competição para tentar descobrir qual seria o número que o seu colega teria escolhido se iria apoderar deles.

De seguida decidi que ao longo da questão 2 os alunos deveriam utilizar sempre os seus conhecimentos sobre as equações, e desta forma resolver cada uma das alíneas da questão. Assim, esperava que os princípios de equivalência, parte da matéria que foi bem trabalhada anteriormente, começassem a surgir com maior naturalidade, tendo os alunos de trabalhar com todo o tipo de operações e de propriedades, como por exemplo a propriedade distributiva. Nas quatro alíneas presentes nesta questão, dei uma especial importância às duas últimas, pois decidi pedir para os alunos trabalharem algo a que não estavam habituados. Na alínea 2.3), sendo a soma de dois números inteiros consecutivos 2142, trata-se de um caso de um problema sem solução. Com isto, perspetivei que os alunos chegassem ao resultado 1070,5 e que, ou se enganassem na resposta, dizendo que a soma seria de 1070,5+1071,5=2142, o que faria com que os números não fossem inteiros, ou, o mais natural, que os alunos dissessem que a equação é impossível, e seria este um ótimo ponto de partida para um esclarecimento sobre a classificação de equações.

Por fim, na última alínea, falava em números pares consecutivos, e, antes de lhes fornecer a "dica" de como poderiam escrever os números pares, tentaria que os alunos iniciassem o trabalho por si mesmos, auxiliando os que tivessem com mais dificuldades. Com esta questão, queria que os alunos notassem que nem sempre a solução da equação é a resposta ao problema, sendo que neste caso, resolvendo por meio de uma equação os alunos poderiam chegar a um resultado de 40, mas essa não era a resposta correta, pois tratar-se-ia do quadragésimo par.

Esta tarefa, para além de ser a mais inclusiva, pois era aquela em que mais tentava que todos os alunos se envolvessem, garantindo que os pares formados não funcionariam apenas com o melhor dos dois alunos a trabalhar e o outro "a reboque", era uma das tarefas das quais eu pensava que poderia tirar mais informações para a minha investigação, devido ao facto de tentar trabalhar muitos dos conteúdos que estão envolvidos na temática em questão.

As Idades

"As Idades" foi a última tarefa, sem contar com o Mini-Teste, que seria trabalhada na aula. Nesta tarefa foram colocados, sem que se exagerasse nesse tipo de ferramenta, alguns problemas "para equacionar" (Abrantes, 1989). As questões sobre as idades são algo que acompanham os jovens ao longo de toda a vida, e a comparação vão fazendo entre a sua e a dos seus pais, ou dos seus irmãos, são uma maneira de irem fazendo Matemática, por vezes sem sequer se reparar que o estão a fazer. Ao longo desta tarefa, achei que seria importante voltar a reforçar que era importante que os alunos definissem o significado da sua incógnita, e por isso, decidi colocar um problema em que a incógnita poderia ter diferentes significados, isto é, o que significa para um pode ser diferente do que significa para o outro. Assim, em momento de discussão coletiva, teria a oportunidade de mostrar duas resoluções, em que o facto de a incógnita ter um significado diferente, fazia com que essas resoluções fossem diferentes, mas ainda assim chegando à mesma resposta final.

A proposta da segunda questão presente na tarefa, teve novamente a intenção de focar o significado da incógnita, mas quis colocar algo que para os alunos poderia ser fácil de resolver, mas que dificilmente conseguissem explicar, de forma a tentarem também trabalhar um pouco mais a comunicação matemática. O facto de a incógnita ter um significado mais complicado (número de anos que vão passar até que a Alice tenha um terço da idade da sua mãe), iria certamente levantar muitas questões da parte dos alunos, perguntas estas que valeria a pena serem prontamente esclarecidas. Mais uma vez, a solução da equação não seria a resposta do problema, algo que fui tentando fazer por várias vezes ao longo de todas as outras tarefas, pois acredito que seja importante que o aluno se relembre do que está a fazer em todos os momentos da resolução do problema, ao invés de ser simplesmente resolver uma equação e escrever o resultado. Desta forma, dá-se um valor maior à tradução e à compreensão do problema, que, segundo a minha experiência enquanto explicador, é uma das maiores dificuldades dos alunos.

Mini-Teste

O Mini-Teste foi concebido a pensar na forma de trabalhar dos alunos, isto é, foi feito para continuarem a trabalhar a pares, tal como vem sendo hábito nos outros Mini-Testes realizados anteriormente. Foi feito para ser realizado nos últimos 25 minutos da última aula da minha intervenção letiva, e tinha como objetivos a tradução algébrica de problemas e a definição de significados das incógnitas. Num conjunto de 4 problemas, os alunos teriam de validar a tradução algébrica do problema que já estava escrita no enunciado, caso não estivesse correto teriam de emendar, e definir o significado da incógnita.

Tentei que todos os problemas tivessem algo ligado ao que fomos falando nas aulas da minha intervenção letiva, sendo que o primeiro deles trabalha com o perímetro de um retângulo, o segundo é para descobrir o número em que alguém pensou, o terceiro envolve a soma de números inteiros consecutivos e o último é um problema de idades.

O facto de ser um momento de avaliação sumativa fez com que eu tentasse ser um pouco mais ambicioso do que vinha sendo, alterando a tipologia das questões, para algo a que os alunos não estavam habituados. Ainda assim, com o foco dado durante as aulas aos significados das incógnitas e à tradução de problemas, acreditei que os alunos conseguiriam ultrapassar as suas dificuldades e realizar um bom trabalho.

A Álgebra está em todo o lado

A tarefa criada para as entrevistas foi, por razões éticas, o mais idêntica possível às tarefas que vinham sendo trabalhadas em aula, por todos os alunos.

A primeira questão estava presente na tarefa TPC, simplesmente com uma apresentação diferente. Decidi colocar esta questão pois nenhum dos alunos dos pares envolvidos na entrevista havia conseguido trabalhar nela na sua resolução do trabalho de casa, e como a entrevista ocorreu no final da intervenção letiva, serviria para compreender se o trabalho que vinha sendo desenvolvido teria, ou não, aspetos positivos relativamente às aprendizagens e capacidades que são exigidas para a resolução desta questão. Os alunos voltaram assim a ter a oportunidade de reparar que nenhum dos amigos está correto relativamente à sua resolução, tendo de os corrigir.

A segunda questão foi elaborada tendo em conta uma das questões presentes na tarefa "Será que vais conseguir descobrir?", de onde se salienta o facto de o problema não ter uma solução. Decidi que voltar a confrontar os alunos com uma tarefa que não tivesse solução seria importante, para verificar se haviam compreendido na aula que um problema não ter solução não implica que a equação que se utiliza para a sua resolução seja impossível.

Aulas lecionadas

Neste capítulo apresento cada uma das 6 aulas que lecionei, e que fizeram parte da minha intervenção letiva. Todas as aulas se iniciaram com um breve momento de introdução da tarefa, seguindo-se o trabalho autónomo e, por fim, a discussão coletiva. A grande parte do tempo de aula foi gasta no segundo momento mencionado, visto que, segundo a minha opinião, é aquele em que os alunos mais desenvolvem as suas aprendizagens. Os alunos trabalharam sempre em pares, havendo um trio, pois o número de alunos assim o exige, em todas as aulas que aqui serão descritas, inclusivamente a Aula 6 que inclui o Mini-Teste. Todos os enunciados nos quais os alunos escreveram as suas resoluções, foram recolhidos e fotocopiados, e posteriormente entregues a cada um deles, de modo a não afetar o estudo por parte dos alunos.

Através da descrição de cada uma das aulas, pretendo identificar todos os aspetos que tinha decidido trabalhar, tentando salientar algumas das estratégias e das dificuldades pelas quais os alunos passaram na resolução de problemas que envolvam equações do 1.º grau, e também aquelas que eu utilizei e senti na lecionação das aulas.

Todas as tarefas e os respetivos planos de aula pelos quais me segui podem ser encontrados nos anexos do presente documento (Anexo 1 e 2).

Aula 1 – 7 de março de 2016

Como o início da aula é um momento muito importante para o bom funcionamento da mesma, tive o cuidado de chegar mais cedo à sala de aula, de modo a escrever no quadro as alíneas da primeira questão da tarefa A Álgebra na Geometria, que envolvia os ângulos. De seguida, com o toque de entrada, deu-se a chegada dos alunos à sala, estando já eu pronto para os receber e para iniciar o trabalho, que esperava que fosse muito produtivo ao longo dos 90 minutos.

Principiei a primeira aula da minha intervenção letiva entregando um enunciado a cada par de alunos, e pedindo que eles fizessem uma rápida leitura do mesmo. De seguida, tentei ver se existiriam dúvidas relativamente ao trabalho que tinham de desenvolver ao longo da aula. Rapidamente surgiu uma questão que já era esperada, envolvendo os símbolos gregos presentes no enunciado da questão 1, visto que não tinham conhecimento da sua existência. Prontifiquei-me a esclarecer rapidamente para toda a turma que eram letras gregas, tal como nós utilizamos o alfabeto, sendo que na Matemática, especificamente em Álgebra, usamos normalmente o x na resolução de equações. Disse-lhes ainda que eram aquelas as letras gregas, alfa, beta e teta, entre outras, que era habitual utilizar-se no que diz respeito aos ângulos, cujas amplitudes não são conhecidas. Com todas as mentes já elucidadas, cerca de 10 minutos após o toque, deu-se início ao trabalho autónomo.

Durante este momento de trabalho tentei acompanhar ao máximo todos os pares de alunos da turma, de maneira a conseguir observar a maioria das dificuldades e das estratégias que utilizavam, pois assim, para além de conseguir preparar um bom momento de discussão coletiva, tinha a oportunidade de estar também a ver alguns aspetos importantes que poderia vir a utilizar na investigação que estava a realizar. Nas resoluções que iam fazendo questão 1, pude verificar que havia uma grande variedade de escolhas entre os vários pares, principalmente na alínea b). Apesar de praticamente todos utilizarem operações inversas para descobrir a amplitude do ângulo beta (β), havia alunos que tentavam descobri-la utilizando ângulos complementares e outros com ângulos suplementares, e a variedade de escolhas poderia levar a um momento importante e esclarecedor na discussão coletiva. A mesma coisa se verificou na alínea seguinte, sendo que o facto de alguns alunos já terem encontrado a solução através de uma equação, fez-me sentir que a minha ideia de levar os alunos da resolução através de operações inversas até ao trabalho com equações, estava a ser bem conseguido, o que me deixou bastante animado. Também aqui, a diversidade de estratégias foi notória, sendo este mais um momento importante a reter para a discussão coletiva.

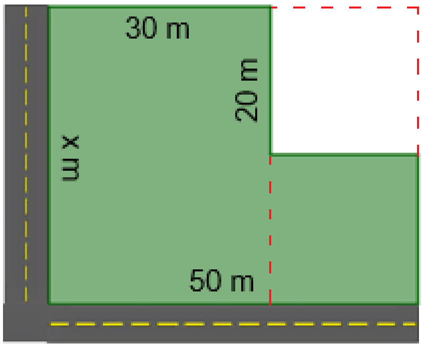


Figura 2 - Imagem da Questão 2 alterada

Posteriormente, veio o trabalho autónomo da questão 2, momento de aula que foi um dos mais importantes, na minha opinião, relativamente às aprendizagens que um professor pode retirar da produção de tarefas, e utilização das mesmas nas suas aulas. Ao longo dos debates que iam tendo nos pares, deparei-me com uma questão que alguns alunos me estavam a levantar, e que os restantes teriam já assumido que o seu pensamento era o correto, sem o conseguirem provar. A ilustração que havia feito para a questão 2, levava a que os alunos assumissem que figura era formada por um retângulo de 30 metros por 20 metros e por dois quadrados iguais, e assim cada um deles teria 20 metros de lado (Figura 2). Apesar de ser o que se verificaria no final, não tinha previsto esta situação, sendo assim a imagem usada um ponto negativo na minha ideia para a aula. Assim, tive a necessidade de pedir aos alunos que parassem as suas resoluções, de maneira a esclarecer que eles não têm como assumir que se tratam de dois quadrados, pois isso não estava explícito no enunciado. Depois de muito custo, pois defendiam que se via na imagem que eram dois quadrados, os alunos compreenderam o que eu lhes estava a tentar explicar, e prosseguiram com o seu trabalho e eu continuei a ouvir as suas dúvidas e as suas ideias de resolução.

Por último, a discussão coletiva teve lugar nos 25 minutos finais da aula, sendo que se iniciou com os alunos que tinha escolhido durante o momento de trabalho autónomo a dirigirem-se ao quadro para apresentarem as suas resoluções da questão 1. Enquanto que na discussão da primeira alínea não houve qualquer comentário, pois todos haviam feito da mesma forma, o mesmo não aconteceu nas seguintes, o que veio a tornar este momento mais produtivo e esclarecedor para os alunos. Ao longo do debate de ideias, os alunos encontraram ainda outras formas de resolver a alínea b), como por exemplo utilizando os ângulos opostos ou o ângulo giro, e desta forma ficou claro para os alunos que não existe apenas uma forma de abordar os problemas, mas sim várias que poderão estar corretas. A discussão da questão 2 acabou por não ser tão produtiva como aconteceu na questão 1, devido ao pouco tempo que já faltava para o final da aula, não sendo inclusivamente possível discutir a última das alíneas. Ainda assim, os alunos que foram apresentar as suas resoluções ao quadro foram alvo de algumas questões e ideias da parte dos seus colegas, como foi o caso da simplificação da expressão numérica da alínea a). Antes do toque entreguei o TPC, informando os alunos que seria para o entregar feito no início da semana seguinte.

Em traços gerais, penso que a maioria dos objetivos que tinha definido para esta aula foram conseguidos, pois os alunos mostraram-se, mais uma vez, extremamente interessados na resolução da tarefa e participativos no momento de discussão coletiva. Trabalharam bastante a sua comunicação matemática na partilha e defesa das suas estratégias, tendo um primeiro contacto com as realidades que lhes quis apresentar, como a oportunidade de verem a Matemática como um corpo todo interligado, o conhecimento das letras gregas e a razão da sua utilização, e, acima de tudo, a compreensão de que, apesar de existirem resoluções diferentes, é possível que estejam igualmente corretas. Quanto às principais dificuldades demonstradas pelos alunos, para além da questão que referi atrás relativamente à imagem, que não foi algo nada fácil de resolver, penso que é importante salientar a dificuldade relativamente à forma de como escrevem uma equação, algo que irei salientar, mais à frente, na minha análise. Relativamente à gestão da aula, penso que a maior dificuldade foi realmente o tempo, sendo que não foi possível terminar a discussão de todas as alíneas da tarefa, aproveitando o início da aula seguinte para o fazer. De qualquer maneira, através da recolha dos enunciados, tive a oportunidade de corrigir os erros feitos pelos alunos, deixando claro o que deveriam ter feito em toda a tarefa.

Aula 2 – 8 de março de 2016

Tal como está mencionado acima, teria de utilizar uma parte da aula para colmatar a falta de tempo da aula do dia anterior, mas tinha o problema de que esta aula seria apenas de 45 minutos. Sabendo isto, voltei a chegar mais cedo à sala, e apresentei logo três resoluções diferentes, que variavam apenas conforme a desconstrução que fizesse do terreno, da última alínea da tarefa A Álgebra na Geometria, para voltar a mostrar aos alunos que poderiam ter optado por qualquer uma das estratégias.

Como a aula de quinta-feira era a última que os alunos da turma tinham durante a manhã, vinha sendo hábito chegarem sempre um pouco mais atrasados, pois o último intervalo antes da hora de almoço é mais curto que o do início da manhã. Ainda assim, talvez por o final do período estar próximo, os alunos chegaram mal deu o toque, disponibilizando-me mais tempo de aula. Com a chegada dos alunos, apressei a explicação que lhes tinha de dar, e segui na apresentação da tarefa O Triângulo que estava destinada a essa aula. Mais uma vez, deixei que os alunos lessem a tarefa, e como tinha um enunciado curtinho e bastante claro, os alunos não colocaram qualquer questão e deitaram mãos ao trabalho.

Seguiu-se um tempo curto de trabalho autónomo, pois a aula era apenas de um tempo, mas não foi essa uma razão suficiente para que o trabalho desenvolvido pelos alunos fosse pouco. Os alunos entregaram-se com afinco à atividade que pedia que descobrissem se o triângulo representado na figura poderia ser equilátero. Tendo a medida de apenas um dos lados, e os outros dois sendo dados por uma expressão algébrica, os alunos rapidamente compreenderam que teriam de utilizar uma equação, igualando dois dos lados do triângulo, e depois ver se seria igual ao terceiro. A variedade de estratégias e as expressões que poderiam utilizar foram todas elas percorridas, umas por uns pares, e outras por outros, chegando toda a turma à conclusão de que o triângulo não poderia ser equilátero.

Ao ver que todos os alunos já tinham resolvido a questão problemática, passei ao momento de discussão coletiva, e ainda faltava cerca de 30 minutos de aula. Como todos os alunos haviam compreendido, e tendo eu tido o cuidado de ver as estratégias que os alunos estavam a utilizar, escolhi um dos pares que tinha igualado os dois lados que ainda tinham incógnita. Dessa resolução, tal como de outros colegas, saiu a resposta de que o triângulo não era equilátero, mas sim isósceles, tendo dois lados de 20 milímetros e o outro lado de 100 milímetros. Deixei algum tempo para que os alunos vissem a resolução, e foi então que levantei a pergunta que tinha de reserva no plano de aula – "Então este triângulo é isósceles?", e ao ouvir por parte de toda a turma uma resposta afirmativa, retirei da minha mala 3 pauzinhos, com os comprimentos respetivos e entreguei-os ao aluno que estava no quadro, dizendo – "Então mostra-me lá esse triângulo isósceles.". Foi então que o aluno compreendeu e explicou aos seus colegas que, com as medidas dos lados a que tinham chegado, não era possível construir um triângulo, pois a soma dos dois lados menores era inferior ao terceiro lado. Dito isto, expliquei aos alunos que para construir um triângulo, é necessário ter três lados, que naquele caso se verificava, mas que a soma das medidas de quaisquer dois lados tem de ser maior, não podendo sequer ser igual, que a medida do lado que resta. Com esta parte compreendida pelos alunos, e com cerca de 20 minutos de aula ainda pela frente, "voltei à carga" – "Então naquele caso, deixava de ser um triângulo. Mas digam-me lá. É possível que seja isósceles? E se sim, de quantas maneiras?". Foi então que, assim, voltei a lançar outro momento de trabalho autónomo, este ainda com ainda mais empenho que o anterior.

Com o aproximar do final da aula, pedi que os alunos interrompessem o trabalho, para vermos então a que conclusões tinham chegado, e pedi a dois alunos de pares diferentes que apresentassem as suas resoluções, sendo que cada um tinha visto uma maneira diferente de o triângulo ser isósceles. Abri então o momento de discussão, e surgiu apenas uma dúvida, relativamente ao resultado dar um número decimal, ficando dois dos lados com 100 milímetros, enquanto que o outro ficaria com 73,33(3) milímetros. Expliquei rapidamente à turma que apesar de ser um número decimal, continuava a ser uma medida, e dando como exemplo as alturas de cada um deles, e o facto de cada um deles estar a crescer todos os dias, mesmo sem que consigam medir essa diferença, pois era algo tão pequenino, que não é visível a olho nu. Ao toque, os alunos saíram da sala e eu recolhi os seus enunciados.

Esta foi, seguramente, a minha aula mais conseguida. Trabalhei todos os aspetos que tinha planeado, desde a comunicação matemática, ao espírito crítico e às propriedades das equações. Foi uma aula na qual os alunos se sentiram completamente envolvidos, chegando eles mesmos a todas as respostas, e fazendo com que eu fosse levantando cada vez mais questões sobre o que diziam. O momento de discussão coletiva foi extremamente produtivo, ao nível de os alunos me pedirem para voltar a ter mais um pouco de tempo para poderem trabalhar e voltarmos a discutir as novas estratégias que haviam encontrado, pedido esse que acedi prontamente, tal era o gosto que os alunos estavam a espelhar por aquele pequeno momento de Matemática. Acredito que esta foi uma tarefa problemática, tal como definida por Polya (1967), não rotineira, isto é, onde os alunos trabalharam com afinco nas suas crenças e ideias, levantaram novas questões e, no final, triunfaram. Esta aula ficará para sempre na minha memória, tal como espero que ainda se mantenha na de alguns dos alunos que a vivenciaram, pois não é todos os dias que um professor tem a oportunidade de ter tanto gosto em ensinar, trabalhando numa atividade tão simples como esta.

Aula 3 – 12 de março de 2016

A aula de dia 12 de março foi a última que lecionei no 2.º período, pois as seguintes seriam para festejar o dia do Pi e para ser feita a autoavaliação.

Esta aula teve novamente 90 minutos e eu, tal como tentei sempre, voltei a chegar cedo à sala, pois sendo apenas 6 aulas, queria aproveitá-las ao máximo. Desta vez, e talvez por ser a primeira aula da turma da semana, estando os alunos na última semana do período, e como tal mais cansados, foram chegando, como se diz na gíria, "a conta-gotas" à sala, o que atrasou um pouco a introdução da tarefa "A Álgebra na Geometria II". Ao sentir que já estava um número considerável de alunos, e cerca de 10 minutos após o toque, decidi averiguar se haveriam dúvidas para a resolução da tarefa, vindo a perceber que não.

Assim, os alunos iniciaram o trabalho autónomo, mas a um ritmo bastante lento, o que para quem tinha estado presente na última aula, parecia muito estranho. Por várias vezes tentei aproximar-me dos pares, para averiguar o que estavam a fazer, de forma a estimular os alunos para a resolução das questões, mas apenas passados 15 minutos é que os alunos voltaram ao seu ritmo de trabalho normal. Beneficiando do "regresso" dos alunos ao que estava habituado, aproveitei para, mais uma vez, perceber as suas estratégias de resolução, bem como as suas dificuldades, para posteriormente poder utilizá-las no momento de discussão coletiva. Pelo que me apercebi, as duas primeiras alíneas da tarefa não estavam a suscitar grandes dúvidas nos alunos, sendo que a maioria deles iniciou a tarefa utilizando apenas operações inversas, ao invés das equações que seriam desejáveis. Após este início mais simples começaram a surgir algumas questões, de como resolveriam a alínea seguinte, o que era natural, visto que estavam a tentar escapar à utilização da Álgebra. Foi então que fui sugerindo junto dos vários pares que desenhassem o retângulo que estava descrito no enunciado, e que lá colocassem toda a informação que sabiam sobre ele. Ao esboçarem a figura e indicando os dados fornecidos na tarefa, os alunos compreenderam que teriam de utilizar os conhecimentos sobre equações para resolver o problema que lhes estava a ser apresentado, e que não era necessário "fugir" de conteúdos que lhes podem ser extremamente úteis. Quando apenas faltava 30 minutos para o final da aula, eram poucos os alunos que tinham conseguido chegar à quarta e última alínea da tarefa, e os que lá haviam chegado, apenas um par tinha conseguido evoluir alguma coisa no problema, e somente tinham utilizado a estratégia de tentativa e erro. Como tinha noção do maior grau de dificuldade da última alínea, pois era necessário que os alunos relembrassem algumas das propriedades dos quadriláteros que tinha trabalhado há mais de um mês, e dada a falta de tempo, decidi terminar com este momento de aula.

Com o início da discussão coletiva, eram vários os alunos que desejavam participar e apresentar à turma as suas resoluções, pelo que tive de recorrer às resoluções mais convenientes, isto é, aqueles que tinham empregue os seus conhecimentos sobre equações e que tinham dado uma resposta o mais completa possível, sendo esse um dos focos da presente tarefa. Para o debate da terceira alínea, decidi solicitar ao par de alunos que tinham resolvido esta questão através de tentativa e erro que explicassem aos seus colegas a sua estratégia, pois a ideia deve ser sempre aumentar ao máximo o leque de estratégias de resolução, deixando assim ao critério dos alunos a escolha do caminho que devem percorrer. Através da sua explicação, que saliento que foi bastante clara para toda a turma, acredito que alguns alunos tenham sentido que, neste caso, teria sido mais simples a sua resolução, mas não para a alínea seguinte. Como nenhum dos pares de alunos tinha conseguido chegar a uma resolução, sem ser o caso do par que já mencionei acima, decidi agarrar eu mesmo na caneta e ir resolvendo no quadro em conjunto com os alunos. Percebi assim, que uma das maiores dificuldades dos alunos está na compreensão do que lhes é pedido, e em perceber que informação deverão retirar dos enunciados para a resolução das tarefas.

Desta forma, considero que apenas parte dos objetivos foram cumpridos, possivelmente por ter sido demasiado ambicioso relativamente à última questão. Para além disso, notei também alguma dificuldade da parte dos alunos quando lhes é pedido uma explicação, por escrito, do seu trabalho. Quanto à capacidade de tradução do problema para uma linguagem algébrica, o facto de a tarefa se demonstrar muito aberta relativamente às estratégias de resolução, fez com que não fosse possível ver tanto como desejava essa capacidade, ou dificuldade, nos alunos. Ainda assim, foi possível ver que, a partir da dica que lhes dei relativamente à possibilidade de esboçarem as figuras que precisam, a tarefa se tornou mais simples e clara para os alunos, e penso que o facto de os alunos terem visto isso, fá-los-á utilizar essa prática mais vezes. Relativamente às dificuldades, penso que desta aula devo dar uma maior importância a duas, pois foram as mais notórias. Primeiro, a dificuldade que os alunos têm em compreender os enunciados e a informação que de lá devem retirar, e em segundo, a dificuldade em equacionar o problema. Este último ponto não aparece por lhes faltar essa capacidade, mas sim porque tentam sucessivamente ir por outros caminhos de forma a evitar as equações.

Aula 4 – 4 de abril de 2016

Tendo noção dos desafios que o primeiro dia do regresso às aulas possa trazer, voltei a preparar-me cedo, distribuindo por cada mesa umas pequenas folhas, com uns cálculos que cada aluno teria de fazer, para assim poderem começar a trabalhar logo desde o início à resolução da tarefa "Será que vais conseguir descobrir?".

Deu-se o toque e, tal como seria de esperar, a entrada dos alunos na sala foi extremamente ruidosa, sendo necessário acalmá-los o mais rapidamente possível, passando de seguida para a introdução do que teriam de fazer. Tentei explicar que aqueles papéis serviriam para colocarem posteriormente o resultado na tarefa, mas, como os alunos não estão habituados a este tipo de trabalho, decidi utilizar um dos alunos como exemplo, respondendo à primeira alínea. Quando compreenderam que o jogo de adivinhação que os seus colegas teriam de fazer para descobrir a sua escolha, os alunos mostraram-se logo muito mais interessados, havendo inclusivamente algumas escolhas bastante interessantes.

Dados os resultados finais de cada um, iniciou-se o trabalho autónomo, sendo que cada elemento de cada par teria de descobrir o número em que o seu parceiro tinha pensado, o que levaria a que cada um deles resolvesse uma das alíneas da primeira questão. Este trabalho tinha como objetivo manter todos os alunos envolvidos na tarefa, pois já havia notado na aula anterior que alguns deles iam simplesmente seguindo o trabalho do seu colega. Compreendi que, apesar do facto de para alguns alunos este tipo de tarefa ser interessante, alguns dos alunos com mais limitações cansaram-se rapidamente de tentar, acabando por dizer o número em que tinham pensado. Ainda assim, houve alguns pares que aproveitaram para se desafiar na busca pelo número do seu colega.

Passados cerca de 40 minutos do início da aula, e com a questão 1 já resolvida por todos os pares, decidi fazer um breve momento de discussão, onde me apercebi que praticamente todos os alunos tinham utilizado perspicazmente, operações inversas. A criação da alínea b) foi já com o pensamento de que os alunos utilizassem tal estratégia, sendo que se não estivessem muito atentos, alguns alunos poderiam enganar-se, o que se veio a verificar. Ao mostrar aos alunos o que tinha acontecido, decidi aproveitar para relembrar da utilidade das equações, e do jeito que elas poderiam ter dado na resolução da tarefa em questão, indo lendo ao mesmo tempo que escrevia no quadro a equação que levaria ao resultado correto.

De seguida, a cerca de meia hora do final da aula, os alunos voltaram a iniciar o trabalho autónomo, prosseguindo para a segunda questão da tarefa. Nesta parte da aula já foi novamente retomado o trabalho normal a pares, sendo importante o debate de ideias para uma boa tradução algébrica de cada um dos enunciados presentes nas várias alíneas. Como me lembrava bem que esta tinha sido uma das grandes dificuldades na última aula, tentei seguir o trabalho dos alunos de mais perto, o que veio a fazer com que tivesse algumas surpresas muito agradáveis. O debate existente relativamente à tradução dos problemas era muito significativo, o que fez com que praticamente todos os pares continuassem a sentir-se envolvidos na resolução da tarefa. Apesar de algumas das resoluções me parecerem muito interessantes, a realidade que vim a notar é que a atividade era muito grande para ser toda ela realizada e discutida numa só aula, e assim a aula terminou durante o trabalho autónomo dos alunos.

Penso que parte dos objetivos desta tarefa foram cumpridos, ainda que não o tenha podido comprovar completamente, pois faltou chegar ao momento de discussão coletiva. Ainda assim, sinto que o principal objetivo, que na minha mente era a tradução algébrica de problemas, foi muito bem conseguido, notando-se uma grande melhoria desde a aula anterior, talvez pelo trabalho desenvolvido na discussão da questão 1. Penso que a ligação que esperava criar entre os alunos e a tarefa com a primeira questão foi, em parte, conseguida, sendo que poderia tê-lo feito de uma forma mais clara e com uma introdução diferente. Relativamente às dificuldades, devo apenas salientar o facto de os alunos terem voltado a tentar não utilizar as equações ao longo da questão 1, o que fez com que se enganassem em alguns casos. Ainda assim, penso que no trabalho autónomo da questão 2, dada a necessidade da utilização das equações e da minha explicação de como deveriam ter aproveitado as suas potencialidades na resolução da questão anterior, fez com que tivessem feito um trabalho muito interessante.

Aula 5 – 6 de abril de 2016

Para a aula de dia 6 de abril, e dado o atraso da aula anterior, tinha planeado terminar a resolução, e fazer a respetiva discussão, da tarefa que havia sido começada na aula anterior e, posteriormente, iniciar o trabalho autónomo da tarefa “As Idades”, que os alunos levariam para casa para terminar, de modo a poder fazer uma breve correção no dia seguinte, antes do Mini-Teste. Ao longo dos 90 minutos, tinha então como principais objetivos a continuação do trabalho em torno da tradução algébrica de problemas, a comunicação matemática e, através das duas últimas questões da tarefa “Será que vais descobrir?” trabalhar o espírito crítico dos alunos e a resposta que é dada aos problemas.

O facto de os alunos prosseguirem com o trabalho iniciado na aula anterior fez com que todos os grupos principiassem mais rapidamente, pois não tinham de esperar pelos colegas que chegavam um pouco atrasados para se fazer uma introdução da tarefa. Assim, os alunos que chegaram logo ao toque, sentaram-se e iniciaram imediatamente o trabalho, o que fez com que os seus colegas, ao vê-los a trabalhar, entrassem na sala mais silenciosos. O trabalho autónomo estava a ser produtivo em praticamente toda a sala de aula até que os primeiros pares chegaram à alínea c), onde se trata de números inteiros consecutivos. As dúvidas começaram a surgir e, apesar apenas ter planeado auxiliar no problema seguinte, apercebi-me que este seria uma ótima introdução para essa ajuda que iria dar. Foi então que me dirigi ao quadro, interrompendo o trabalho dos grupos, e relembrei que, tal como havia acontecido no início da aula anterior, cada aluno tinha pensado num número. Pedi então que imaginassem que eu tinha também pensado num número, e que me dissessem que número seria. Foi então que os alunos começaram a dizer que não sabiam, porque não lhes tinha dado pista nenhuma, e, portanto, era uma letra, ouvindo eu praticamente todo o alfabeto para escolher apenas uma. Aproveitei a quantidade de hipóteses que me estavam a dizer para definir “n” como o número em que tinha pensado. De seguida perguntei qual seria o número seguinte, para o qual recebi, novamente, a resposta que não sabiam, dizendo outra letra. Esclareci que o número a seguir ao que eu tinha pensado seria o meu número mais um, através de vários exemplos. Sendo assim, os alunos rapidamente perceberam que o outro número a seguir seria o n + 2, e por aí em diante. Com isto, perguntei então o que tinha pensado, que era a forma é que escrever os números pares que são pedidos na questão seguinte. Ao que os alunos, prontamente me responderam que era fácil, dizendo que se eram pares seria o n, o n + 2, o n + 4, etc… sendo apenas necessário ir somando números pares. Apesar de a resposta estar correta e servir para a resolução da última alínea, algo que deixei claro, decidi aprofundar um pouco mais o conhecimento dos alunos, perguntando de que forma poderíamos garantir que aqueles números serão sempre pares, isto é, como é que seria possível escrever uma sequência só com números pares. Houve então um dos alunos que comentou o facto de os números pares serem múltiplos de dois, algo que aproveitei logo, de modo a não prolongar muito aquele momento extra da aula, explicando que se aproveitassem o que haviam feito para a alínea anterior e multiplicar cada um daqueles números por 2, mostrando-lhes a referência que deve ser feita à propriedade distributiva naquele caso. De seguida, os alunos continuaram o trabalho autónomo, momento que tive de parar a cerca de 45 minutos de terminar a aula, pois não poderia deixar o trabalho da tarefa seguinte para a aula do Mini-Teste, e tinha o desejo de que, pelo menos em aula, todos os alunos ficassem com algumas ideias relativamente aos problemas de idades, que estava incluída na avaliação do dia seguinte.

O momento de discussão coletiva que se seguiu foi muito importante para clarificar algumas ideias erróneas que ainda subsistiam, relativamente à classificação de equações. Relativamente ao debate das duas primeiras alíneas posso dizer que não levantou grandes questões, pois os todos os pares de alunos os haviam resolvido corretamente, e por isso, tive a oportunidade de salientar algumas boas traduções algébricas dos problemas e escolher alguns alunos que apresentavam mais pormenorizadamente os princípios de equivalência ao longo das suas resoluções. Foi então que, na resolução da terceira alínea, surgiu a primeira grande dificuldade dos alunos. Apesar de uma correta tradução algébrica e respetiva resolução, ao longo do trabalho autónomo reparei que alguns alunos tinham definido a equação como impossível, apesar de chegarem à equação $x=1071,5$. O facto de a pergunta salientar que se tratava da soma de dois números inteiros consecutivos, e como o número não era inteiro, os alunos definiram então que era impossível, erro que já estava previsto no plano de aula que pudesse surgir. Aproveitei essa confusão dos alunos, para poder fazer daquele um bom momento de aprendizagem. Expliquei então que a equação era possível e determinada, pois tínhamos encontrado o valor concreto que responde corretamente àquela equação, mas que simplesmente não era inteiro, o que faria com que a solução para o problema não existisse, que eram coisas diferentes. Vendo que não tinha sido suficientemente claro para todos os alunos, apresentei-lhes uma equação impossível, e pedi que tentassem encontrar o x que fosse a solução para aquela equação, e desta forma, penso que todos os alunos ficaram a compreender a diferença entre uma equação impossível e um problema que não tem solução.

Por fim, chegou a quarta e última alínea, de onde percebi que querendo aprofundar certos conhecimentos dos alunos os poderia acabar por confundir, pois o facto de ter explicado uma maneira de escrever os números pares, fez com que todos os pares utilizassem essa estratégia de resolução, chegando ao resultado 40. Ao perceber a dúvida que existia, e tendo visto que praticamente todos tinham chegado a este ponto, decidi tratar eu mesmo dessa questão no quadro. Traduzi o problema para a forma algébrica, e cheguei à mesma conclusão que eles, ou seja, que n=40. Prontamente alguns alunos comentaram que a soma desse número com os dois números pares seguintes, o 42 e o 44, não ia dar o resultado que era pretendido. Tive então de voltar à minha explicação dos números pares, e mostrar-lhes que aquilo não era o número desejado, mas sim significava que o número pretendido era o quadragésimo número par, ou seja, o número 80, e assim, a soma de 80 com 82 e 84 já ia dar os 246 que estavam definidos no enunciado. Com isto, tornou-se possível salientar, mais uma vez, da importância do significado das incógnitas e da sua boa compreensão.

Ao reparar que a aula estava quase a chegar ao fim, entreguei a tarefa "As Idades" aos alunos para que trabalhassem em casa, deixando para a aula do dia seguinte a sua discussão.

Penso que os objetivos da aula foram parcialmente atingidos, ficando apenas a faltar o trabalho na nova tarefa. Inclusivamente, o momento em que acabei por levar os alunos a resolver um problema de determinada maneira acabou por se tornar importante para salientar a importância da definição das incógnitas, algo a que também iria ser dada uma grande importância no Mini-Teste. As dificuldades apresentadas pelos alunos foram as esperadas, sendo de salientar a compreensão de significados e a classificação de equações. Quanto ao papel do professor, devo salientar que a grande dificuldade que senti foi novamente a gestão do tempo, pois se quisesse fazer tudo o que tinha planeado, acabaria por passar por cima de alguns erros e debates que são importantes para as aprendizagens dos alunos.

Aula 6 – 7 de abril de 2016

A última aula da minha intervenção letiva voltaria a ser de apenas 45 minutos, sendo que eu tinha de disponibilizar os últimos 25 para a resolução do Mini-Teste. Esta aula tinha como objetivo que os alunos trabalhassem a comunicação matemática e que tivessem um maior cuidado com os significados que davam às incógnitas, para além da resolução do Mini-Teste. Dado o pouco tempo que tinha para fazer a discussão do trabalho que os alunos tinham feito em casa, e como os alunos tinham percebido da aula anterior que era algo importante, o início da aula foi logo a seguir ao toque, pois os alunos até estavam à porta da sala antes do mesmo.

Enquanto os alunos retiravam o seu material, preparei o quadro com as questões da tarefa "As Idades", e pedi a um dos alunos que haviam feito o trabalho de casa, que neste caso foi a grande maioria, para ir mostrar à turma a sua resolução. O aluno escreve então a sua resolução, e muito rapidamente vejo alguns braços no ar, como se a resolução do colega estivesse errada, mas não era o que se viria a verificar. Perguntei então a um desses alunos que explicasse a sua questão, e foi então que percebi que os alunos tinham utilizado significados de incógnitas diferentes, e decidi aproveitar. Coloquei então os 2 alunos, o que já estava de pé, e o que tinha feito a questão, lado a lado, a transcrever para o quadro o que tinham feito em casa. Pedi que resolvessem as 4 alíneas da primeira questão, e posteriormente que explicassem. O problema presente no enunciado encontrava-se na última alínea, e ambos os alunos tinham chegado ao mesmo resultado. Dois significados diferentes, levavam a duas equações diferentes, mas obtinham a mesma resposta, o que fez com que este se tornasse num momento muito produtivo para as aprendizagens dos alunos relativamente à importância do significado que definem para a incógnita.

De seguida, percebendo que apenas os alunos que tinham tido explicação no dia anterior é que teriam feito a questão 2, pois era mais complicada no que diz respeito ao significado da incógnita, e que ainda assim não compreendiam o que lá estava feito, decidi ser eu a mostrar uma resolução no quadro. Fui escrevendo no quadro as informações que estavam a ser dadas pelos alunos, tentando fazê-los sentir que estavam a ser também parte da resposta, para facilitar assim a sua compreensão. Desta forma, tornei a explicação mais breve, garantindo que a complexidade que tinha definido para a incógnita estava a ser compreendida por todos.

Por fim, nos últimos 25 minutos da aula, realizou-se o Mini-Teste a pares, como vinha sendo hábito desde o início do ano, para que pudessem debater algumas ideias entre si antes de definirem a sua resposta.

Métodos e procedimentos de recolha de dados

A metodologia de recolha de dados utilizada no decorrer do meu estudo sobre as estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos é de caráter qualitativo, como recomendado por Bogdan & Biklen (1994), procedi a uma recolha de dados diversificada. Apesar de ser um tema já estudado noutros trabalhos, o objetivo será formular conjeturas ao longo do desenvolvimento do estudo, em vez de querer apenas corroborar as ideias defendidas e os resultados obtidos nesses mesmos trabalhos.

Um dos métodos de recolha de dados que foi utilizado foi a observação direta no contexto de sala de aula. Uma vez que o meu principal papel na aula seria o de professor, pois as aprendizagens dos alunos devem ser colocadas acima de qualquer outro papel, aproveitei as notas que o professor orientador, o professor cooperante e o meu colega de mestrado foram tirando ao longo das aulas. Estes apontamentos, que me iam sendo transmitidos no final de cada uma das aulas, permitiram que a minha análise fosse muito mais aprofundada do que se tivesse de fazê-los apenas eu, pois a atenção dada por eles a cada estratégia e dificuldade manifestada pelos alunos foi mais completa do que eu conseguiria fazer.

Um outro método de recolha de dados que utilizei no decorrer desta investigação foi a realização de uma entrevista a dois pares de alunos. Para a seleção dos alunos que iriam ser entrevistados foram tidos em conta vários aspetos que me pareceram relevantes para que o material recolhido fosse o mais revelador possível relativamente às estratégias e dificuldades dos alunos. Os pares de alunos escolhidos foram aqueles que melhor se envolvessem tanto na resolução da tarefa, como no trabalho conjunto, pois dessa forma as estratégias seriam mais debatidas entre ambos, e as dificuldades tornar-se-iam mais claras.

Por fim, utilizei a recolha das produções escritas dos alunos, que veio a demonstrar ser de extrema importância no decorrer desta investigação, uma vez que a análise feita a estas produções, tanto nas tarefas propostas em aula, como no Mini-Teste, momento de avaliação, foram um complemento essencial aos apontamentos referidos acima na observação direta.

Observação

A observação incidiu sobre a atividade dos alunos em todos os momentos de aula, ou seja, nas introduções das tarefas, nos momentos de trabalho autónomo, de discussão coletiva e de síntese. Ao longo dos momentos de trabalho autónomo aproveitei para circular pela sala, tentando perceber e, em alguns casos, esclarecer as dúvidas que iam suscitando nos vários pares de alunos, usufruindo destes mesmos instantes para compreender muitas das ideias que os alunos iam tendo e utilizando, bem como as dificuldades que iam revelando. Nos momentos de discussão coletiva tive a oportunidade de ouvir e de compreender muitas das estratégias que cada grupo usou, beneficiando da argumentação que cada par teve de apresentar para explicar à turma as suas ideias.

Entrevista

As entrevistas "podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas" (Bogdan & Biklen, 1994), e como tal, também eu quis tentar aproveitar este método ao máximo.

Para a realização das entrevistas tive em conta vários aspetos antes que a mesma fosse realizada. Primeiramente, e após a seleção dos alunos, feita tal como descrito anteriormente, pedi autorização aos encarregados de educação para que os seus educandos participassem no respetivo estudo. De seguida, e tendo em conta que não poderia prejudicar a aprendizagem dos alunos, encontrei, em conjunto com eles, uma data para a qual estariam disponíveis, sem que se tivessem de deslocar à escola propositadamente num horário diferente, tendo sido decidido que seria realizada antes de iniciarem as aulas no dia 18 de abril. Outro dos pontos que tive em conta para a entrevista foram as questões de ética, pois também não é desejável que os alunos entrevistados saiam beneficiados relativamente aos seus restantes colegas da turma. Desta forma, as tarefas projetadas para a entrevista foram recuperadas de questões trabalhadas em sala de aula sem que lhes fossem feitas grandes alterações, disponibilizando posteriormente a tarefa da entrevista aos restantes alunos da turma.

As entrevistas realizadas aos dois pares de alunos selecionados foram alvo de gravação áudio e tiveram cerca de 30 minutos de duração. Ao longo das entrevistas fui colocando algumas questões aos pares de alunos, tendo o cuidado de tentar extrair deles mesmos as respostas às suas questões, procurando sempre que justificassem tudo o que escreviam e pensavam, para que fosse possível compreender as suas resoluções, e quais as grandes dúvidas que foram surgindo ao longo da realização da tarefa.

Recolha documental

As produções escritas dos alunos, isto é, as tarefas resolvidas pelos alunos durante as aulas e a resolução do Mini-Teste que foi preparado para o final da intervenção, foram documentos muito importantes para poder corroborar as aprendizagens a que os alunos chegaram, e para realçar as dúvidas e dificuldades que demonstraram durante a resolução das várias tarefas.

Para que as tarefas sejam realizadas em conjunto, é norma nas aulas apenas se entregar um exemplar do seu enunciado a cada par de alunos, de forma a partilharem ideias. No final de cada aula recolhi as produções dos alunos e fotocopia para a aula seguinte, permitindo que fique com as produções dos alunos sem comprometer o estudo de cada um deles.

Neste estudo foram ainda utilizados outros documentos, como é o caso dos inquéritos feitos aos alunos no início do ano e as pautas de avaliação, de forma a fazer uma melhor caracterização da turma.

Análise dos dados recolhidos

Neste tópico pretendi fazer uma análise dos dados que foram recolhidos durante a minha intervenção letiva, de modo a encontrar respostas às questões que foram formuladas para a minha investigação. Assim, tentarei destacar algumas evidências que são, para mim, significativas das estratégias que os alunos utilizam na resolução de tarefas que envolvam equações do 1.º grau, bem como as dificuldades que fora sentindo e demonstrando ao longo desse mesmo trabalho. Para tal, utilizarei as produções dos alunos realizadas durante as aulas, assim como o trabalho de casa que lhes foi pedido e as entrevistas realizadas a dois pares de alunos.

De forma a conseguir chegar melhor às dificuldades que os alunos sentiram durante a resolução das tarefas, pedi-lhes que, no momento de discussão coletiva, passassem a utilizar um material de escrita diferente, algo a que a maioria da turma teve em atenção, o que veio, posteriormente, a facilitar bastante a minha análise.

Ao longo desta mesma análise procuro mostrar ilustrações do maior número possível de pares, de forma a espelhar não só a grande heterogeneidade existente na turma, como também dar uma igual importância ao trabalho de todos os alunos.

De forma a salvaguardar os direitos dos alunos, não utilizarei qualquer dos seus nomes, sendo que irei referir-me a cada par com um número, que foram definidos por mim, consoante a disposição da sala.

Análise das estratégias

Na minha análise das estratégias que os alunos utilizam na resolução de tarefas que envolvam equações do 1.º grau reparei que o seu leque de ferramentas é muito vasto, tentando eles, na maioria dos casos, fugir às equações, pois não se sentem muito à vontade a fazer a tradução algébrica das tarefas problemáticas. Ainda assim, saliento várias das estratégias utilizadas pelos alunos, quer elas sejam ligadas às equações, como são a utilização de balanças ou dos princípios de equivalência, quer sejam fora do tema, como é o caso da tentativa e erro.

Tradução algébrica de problemas

A primeira estratégia utilizada pelos alunos, ainda que não muitos, que me parece ser de extrema importância trata-se da tradução algébrica de problemas. Apesar de ser também uma dificuldade para alguns dos alunos da turma, tal como será visto na seguinte análise das dificuldades, esta é uma estratégia, que quando bem compreendida, os alunos utilizam com grande mestria, tornando as tarefas problemáticas muito mais acessíveis. As aprendizagens dos conteúdos da Álgebra, mais concretamente das equações, estavam bem consolidadas, daí o trabalho realizado ao longo da minha intervenção letiva ser tão virada para as questões problemáticas, como é o caso presente na Figura 3.

2.1. A soma do sêxtuplo de um número com dois é igual ao próprio número. Qual é o número?

$6x \quad + 2 \quad = \quad x$

Figura 3 - Resolução Par 9 – Questão 2.1 – "Será que vais conseguir descobrir?"

Na resolução da questão 2.1 da tarefa "Será que vais conseguir descobrir?", o par 9 demonstra uma ótima representação do seu pensamento ao longo do trabalho em torno da tarefa. Inicialmente decidiram procurar o que não conhecem, isto é, a incógnita do problema. Definindo-a como "x", prosseguem vendo que é calculada a soma do seu sêxtuplo, 6x, com dois, e que isso será igual ao próprio x. A partir deste momento, com a tradução corretamente feita, os alunos sentem-se naturalmente mais confiantes para encontrar o valor que deve ter a incógnita, de forma a tornar a equação numa proposição verdadeira.

Outro dos casos em que tive a oportunidade de acompanhar mais de perto este trabalho de tradução foi durante a entrevista. Foi com o Par 7 na sua resolução da questão 3 da tarefa "A Álgebra está em todo o lado", presente na Figura 4.

3. A soma das idades da Alice, do Marco e da Maria é 54 anos. A Maria tem o dobro da idade da Alice e o Marco tem menos 6 anos do que a Alice. Que idade tem cada um?

Figura 4 - Questão 3 - "A Álgebra está em todo o lado"

De seguida, apresento o excerto do diálogo realizado entre mim e os alunos do par, em que se pode ver como os alunos vão conseguindo construir a tradução algébrica do problema, ainda que apoiados nas sucessivas intervenções do professor. Para salvaguardar a identidade dos alunos em questão, eu serei P, e eles serão A e B:

P – Então a Alice vai ter…

A – x.

P – Exato, x anos. A Mari…

A – x anos.

B – A Maria vai ter o dobro…

A – Ah, já sei…

P – Ou seja, vai ter…

A – 2 vezes x.

P – Exato, e o Marco vai ter.

A e B – x – 6.

P – E eles todos juntos têm…

A – 54 anos.

P – Então pronto. É isso.

A tradução algébrica de problemas deve ser muito bem trabalhada com os alunos, pois se eles se sentirem à vontade na utilização deste tipo de conhecimentos, passam a sentir um maior interesse nas tarefas que resolvem, vendo assim uma maior utilidade dos conteúdos lecionados.

Verificação dos resultados

A verificação dos resultados obtidos é uma estratégia que alguns alunos utilizam para confirmar se a solução encontrada para a equação torna-a verdadeira, substituindo a sua incógnita pelo valor da solução. Através deste método, torna-se mais fácil para os alunos perceber o que estão a fazer, e se as suas resoluções de equações estão corretas. Sabendo que, em momentos de maior tensão, como são os casos dos testes de avaliação, podem surgir pequenos erros, é importante deixar bem saliente junto dos alunos a importância que deve ser dada a esta estratégia, permitindo que rapidamente confirmem as suas resoluções.

2. Dois amigos compraram, em conjunto, dez livros. A Alice comprou o dobro dos livros do Marco. Quantos livros comprou a Alice?”
   a. Escrevam uma equação que te permita resolver o problema, explicando o significado de cada um dos termos da equação.

   b. Que resposta davam ao problema? Justifiquem.

Figura 5- Questão 2 - "A Álgebra está em todo o lado"

Ao longo da minha intervenção letiva, tentei mostrar junto dos alunos o peso desta estratégia na resolução de problemas, através de exemplos como aconteceu durante um dos diálogos realizados durante a entrevista ao par 10, na resolução da questão presente na Figura 5. Tratando-se de um par diferente, os alunos serão considerados as letras C e D:

C – Oh professor, se 8 são os livros do Marco, como é que vai dar 10?

P – Se 8 fossem os livros do Marco, quantos é que tinha comprado a Alice?

D – 16.

P – Exato. 16. Mas, 8 mais 16…

C – Não dá 10.

P – Exato. Por isso o Marco não pode ter comprado 8 livros.

Um outro exemplo da verificação de resultados foi o caso do trabalho desenvolvido pelo par 1 na aula 4 da minha intervenção letiva (Figura 6). Quando um dos elementos do par, pensando que havia descoberto o número em que o outro tinha pensado, decidiu fazer uma confirmação, realizando todos os passos que o seu colega tinha percorrido até lhe dar o valor final (no lado direito da imagem da figura). Desta forma, teve uma maior certeza de que a sua resolução estaria correta.

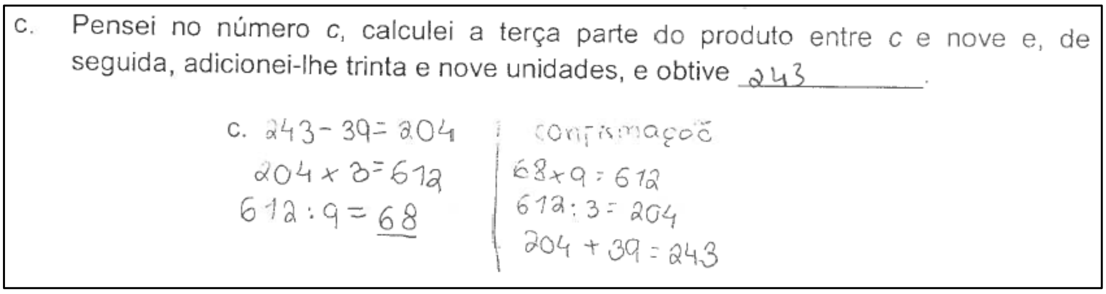


Figura 6 - Resolução Par 1 – Questão 1.c) – "Será que vais conseguir descobrir?"

A verificação dos resultados é uma estratégia que deve ser reforçada, principalmente junto dos alunos que sentem maiores dificuldades no trabalho com a Álgebra, pois será um apoio que terão às suas resoluções.

Operações inversas

Usar as operações inversas foi a estratégia mais utilizada pela grande maioria dos alunos ao longo de toda a minha intervenção letiva, excetuando os casos em que se lhes exigia que usassem as equações. Já seria de esperar que, ao longo do sétimo ano e com o pouco trabalho algébrico, nomeadamente com as equações, realizado com os alunos até à data, faria com que eles tentassem utilizar uma outra qualquer estratégia com que se sentissem mais familiarizados.

Ainda assim, através das suas resoluções, em que recorreram às operações inversas, foi possível ver vários dos conhecimentos que são trabalhados nas equações. Por exemplo, na questão 1 da tarefa "A Álgebra na Geometria" representada na Figura 7.

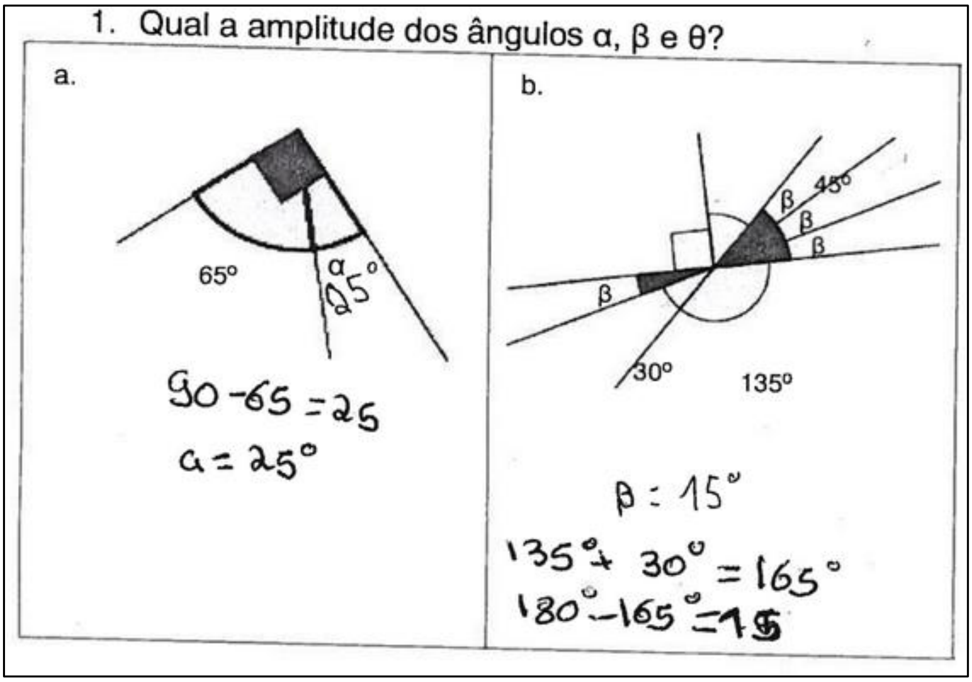


Figura 7 - Resolução Par 7 – questões 1.a) e 1.b) – "A Álgebra na Geometria"

Nas duas alíneas da questão, todos os cálculos que os alunos do par 7 realizaram foram os passos que deveriam ter dado no caso de utilizarem as equações para encontrar a medida da amplitude dos ângulos. Por exemplo, no caso 1.a):

$$x + 65 = 90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 90 - 65 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 25$$

Para a passagem do primeiro para o segundo passo, o aluno retiraria 65 unidades a cada um dos membros.

A mesma coisa aconteceria na alínea 1.b):

$$x + 30 + 135 = 180 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 165 = 180 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 180 - 165 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 15$$

Os alunos deveriam primeiro fazer a soma de 30 com 135, e depois do segundo para o terceiro passo, retirariam 165 unidades a cada um dos membros.

Mas nem sempre o facto de ser a estratégia mais utilizada pela turma foi a razão para merecer nota de destaque, sendo o próximo exemplo um caso de resolução único na segunda aula da minha intervenção letiva, com a tarefa "O Triângulo". Tal como está apresentado na Figura 8, o par 9 trabalhou como se estivesse a igualar o lado conhecido, que mede 100 milímetros, ao lado esquerdo, que é dado pela expressão 2x + 60. Mais uma vez, são percorridos todos os passos que teria de seguir se tivesse utilizado as equações, como os seus colegas. Primeiro retiraria 60 unidades a ambos os membros, e de seguida dividi-los-ia por dois, pois era o coeficiente da sua incógnita x, chegando ao resultado x=20. De salientar, que o aluno compreende que o x apenas pode ter um valor, pois os cálculos que faz posteriormente são através da substituição de x por 20, percebendo que assim o triângulo ficaria com dois lados iguais, com 100 milímetros cada um, e com um lado diferente, que mediria 140 milímetros, não podendo assim ser equilátero, tal como escreve na sua resposta.

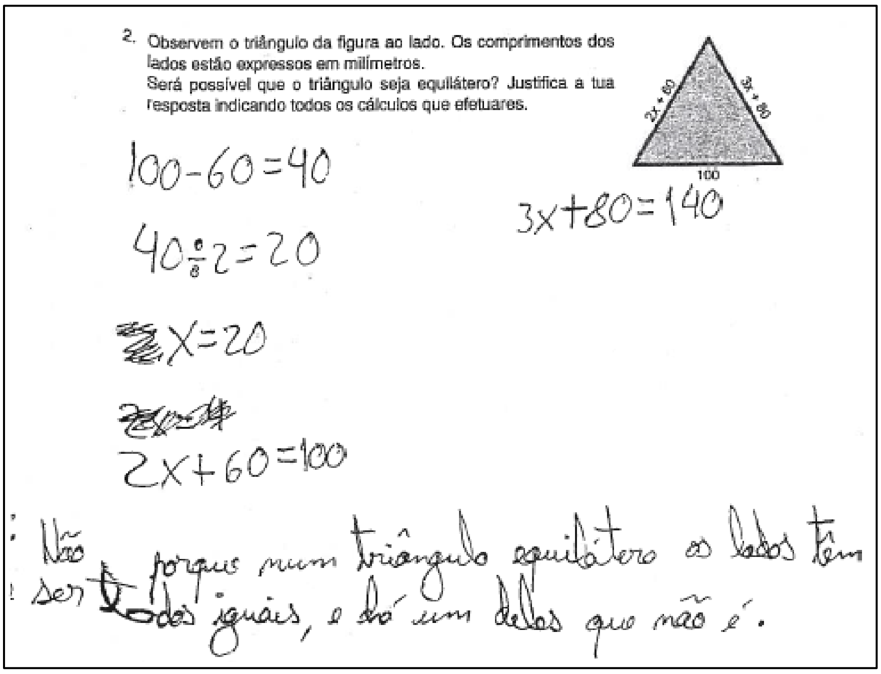


Figura 8 - Resolução Par 9 – Questão 1 – “O Triângulo”

Equações

A utilização das equações como estratégia para a resolução de problemas foi uma base que procurei dar aos alunos, através das tarefas problemáticas que lhes fui propondo ao longo das aulas. Apesar das dificuldades apresentadas por alguns alunos, penso que recebi indícios suficientes para acreditar que é um método de resolução que os alunos irão passar a utilizar com maior frequência, sem que para isso lhes tenha de ser pedido.

Ao longo das aulas fui verificando que os alunos começaram a tentar, cada vez mais, utilizar as equações como estratégia na resolução das tarefas propostas, o que acabou por se tornar muito gratificante, pois foi para isso que desenhei as tarefas que lhes apresentei. Prova disso, são os dois exemplos seguintes (Figuras 9 e 10) que nos apresentam, respetivamente, os trabalhos desenvolvidos pelo par 5 na aula 3, e por um elemento do par 8 na resolução de uma tarefa que pedi que terminassem em casa.

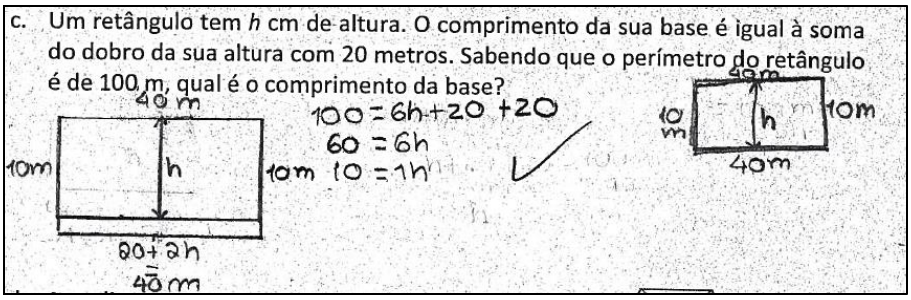


Figura 9 - Resolução Par 5 – Questão 1.c) – "A Álgebra na Geometria II"

Neste primeiro exemplo, vemos todos os passos realizados pelos alunos. Desde a tradução algébrica do problema, com o esboço a acompanhar os dados que o enunciado fornece, até à correta resolução da equação. É através de resoluções como esta, bem organizada e clara na sua estratégia, que os alunos podem vir a ganhar uma maior vontade de prosseguir com as aprendizagens na Álgebra, sendo que estas novas ferramentas poderão vir a ser-lhes extremamente úteis no futuro, independentemente da área e da profissão que venham a escolher.

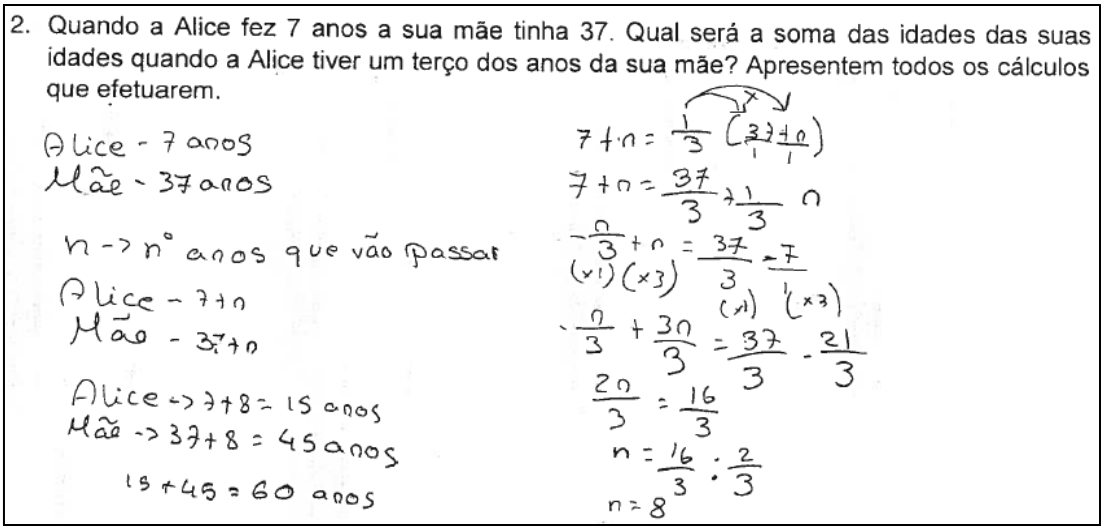


Figura 10 - Resolução de um aluno do Par 8 – questão 2 – "As Idades"

Este exemplo foi um motivo de grande orgulho pessoal, pois trata-se de um trabalho de um dos alunos que tem necessidades educativas especiais, sendo este um caso de muito sucesso, e de grandes melhorias ao longo do ano, acabando até o terceiro período com nota 4. Sendo esta uma das tarefas mais complicadas, pois foram poucos os alunos que a haviam conseguido realizar, é possível que tenha tido o auxílio de algum explicador, mas o mais importante foi que, ao questioná-lo sobre a resolução, consegui perceber que o aluno ficou a compreender a resolução feita. A definição da incógnita poderia estar mais completa, mas o trabalho realizado na resolução da equação é de um enorme nível de dificuldade. Inicia-se com uma propriedade distributiva, bem representada pelo aluno, e a partir daí toda a equação para a ser trabalhada com números fracionários, inclusivamente no último passo, o aluno decide dividir ambos os membros pelo coeficiente da sua incógnita, que é de dois terços). Uma ótima resolução, que poderia ter sido apresentada aos seus colegas, caso tivesse sido possível deixá-los trabalhar mais tempo na tarefa "As Idades".

Utilização de balanças

Esta foi uma estratégia utilizada por apenas três pares de alunos ao longo das aulas que lecionei, mas ainda assim merecia ser alvo da minha análise. Consoante as tarefas que estão a resolver, esta forma de pensar pode tornar a resolução de equações mais fácil e compreensível para os alunos, pois fornece uma imagem da igualdade entre pesos, que nem sempre é fácil de imaginar, que representa a igualdade entre os membros de uma equação.

O par 14 fez referência a este método de resolução de equações ao fazer um esboço da balança e do que vai acontecendo à mesma (Figura 11).

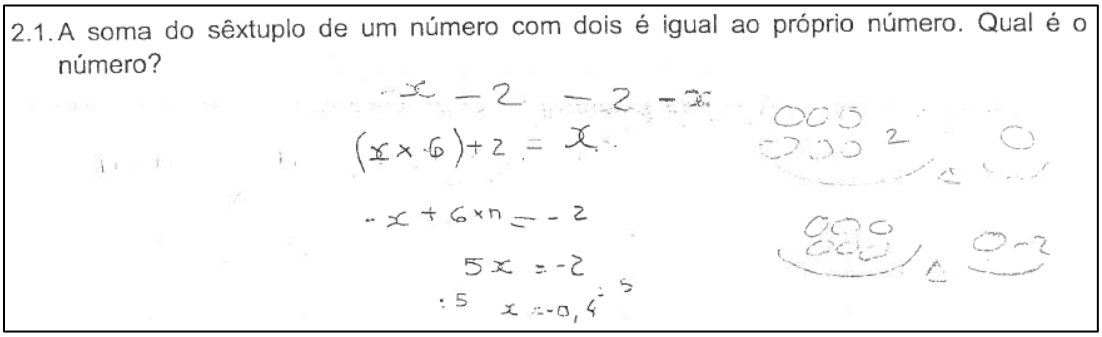
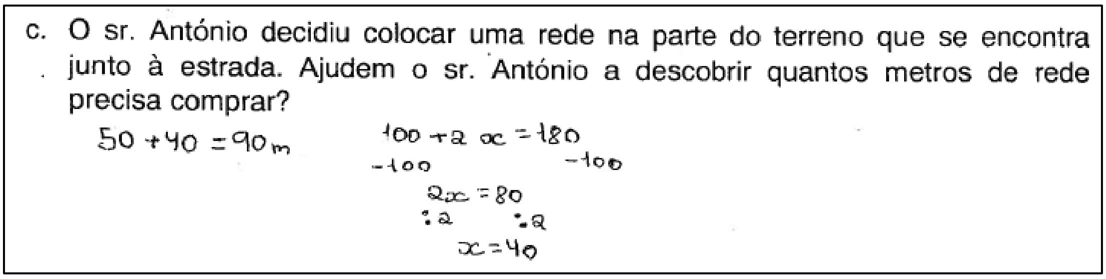


Figura 11 - Resolução Par 14 – Questão 2.1 – "Será que vais descobrir?"

Apesar de poder vir a tornar-se confuso para alguns alunos, por exemplo quando os casos levarem a números negativos, penso que esta é uma estratégia a ter em conta numa fase introdutória ao ensino das equações, pois reduz um pouco o nível de abstração ajudando assim a compreensão da mecânica existente na resolução de equações.

Utilização de princípios de equivalência

Uma das estratégias muito utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas que envolvem equações é o recurso aos princípios de equivalência. Nota-se que foi um dos conteúdos que recebeu maior foco durante as aulas anteriores, acabando por se tornar numa aprendizagem realmente significativa para os alunos. De forma a compreender os passos que estão a dar, os alunos têm o hábito de anotar junto de cada um dos membros a operação que irão realizar de seguida, tal como se pode observar nos dois exemplos de resolução realizados pelo par 13, nas Figuras 12 e 13.



c. O sr. António decidiu colocar uma rede na parte do terreno que se encontra junto à estrada. Ajudem o sr. António a descobrir quantos metros de rede precisa comprar?

$50 + 40 = 90$ m

$100 + 2x = 180$

$-100 \quad -100$

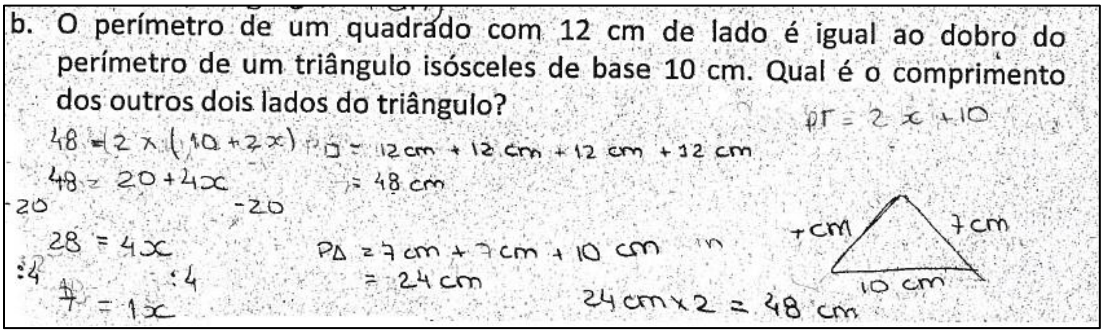
$2x = 80$

$:2 \quad :2$

$x = 40$

Figura 12 - Resolução Par 13 – Questão 2.c) – "A Álgebra na Geometria"

Na presente resolução da questão 2.c) da tarefa "A Álgebra na Geometria" nota-se a importância dada pelo par 13 na clarificação do seu trabalho. Mostram que encontram o valor da incógnita que é solução da equação, demonstrando todos os passos dados para aí chegar. Primeiro retiram cem unidades a cada um dos membros da equação, para de seguida dividi-los pelo coeficiente da sua incógnita, dois. Desta forma, até no momento de discussão coletiva, os alunos sentem uma maior facilidade em exprimir os seus raciocínios.



b. O perímetro de um quadrado com 12 cm de lado é igual ao dobro do perímetro de um triângulo isósceles de base 10 cm. Qual é o comprimento dos outros dois lados do triângulo?

$48 = 2 \times (10 + 2x)$

$48 = 20 + 4x$

$-20 \quad -20$

$28 = 4x$

$:4 \quad :4$

$7 = 1x$

P□ = 12 cm + 12 cm + 12 cm + 12 cm

= 48 cm

PΔ = 7 cm + 7 cm + 10 cm

= 24 cm

24 cm × 2 = 48 cm

PT = 2x + 10

7cm 7cm 10 cm

Figura 13 - Resolução Par 13 – Questão 1.b) – "A Álgebra na Geometria II"

Quanto a esta resolução, o par volta a salientar os passos que dá, mostrando um grande à vontade na utilização desta estratégia. Enquanto a maioria dos pares da turma decidiu utilizar as operações inversas na resolução da questão 1.b) da tarefa "A Álgebra na Geometria II", o par 13 seguiu o seu rumo usando equações, algo que lhes poderá vir a dar muito jeito no futuro, pois as equações e os conteúdos sobre elas continuarão a aparecer nos anos seguintes, e quanto mais consolidada estiverem essas matérias, mais fácil se tornará a ligação a novas aprendizagens.

Tentativa e erro

A última das estratégias que me pareceu ter um destaque considerável no trabalho desenvolvido pelos pares foi a utilização da tentativa e erro. Nas questões em que estavam a sentir maiores dificuldades, os alunos sentiram a necessidade de fazer várias tentativas, até chegarem a um valor que estivesse dentro das limitações do enunciado e que fizesse sentido no mesmo. Tal estratégia, em certos problemas, quando bem trabalhada, pode mostrar muitos conhecimentos da parte dos alunos, como foi o caso presente na Figura 14.

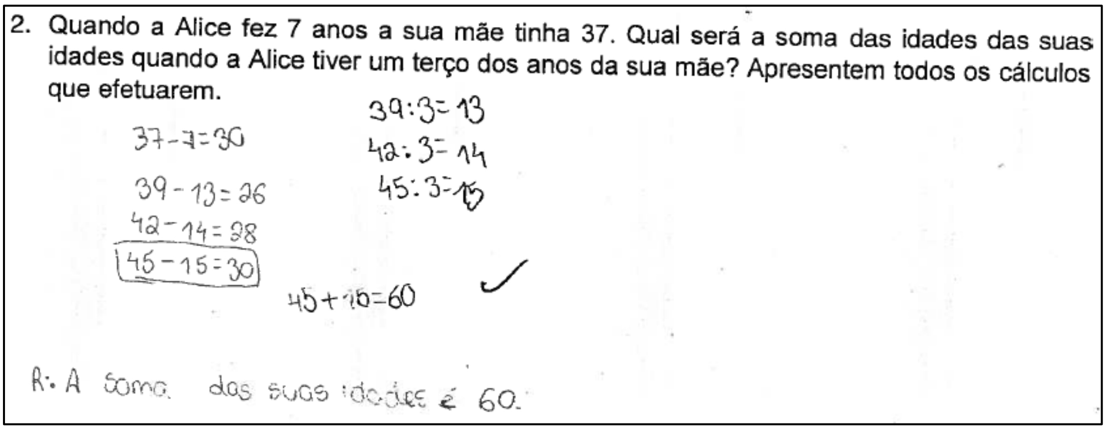


Figura 14 - Resolução de um aluno do Par 1 – questão 2 – "As Idades"

Nesta resolução, o aluno do par 1 mostra compreender o que quer. Sabe que no momento atual, a diferença entre as idades da Alice e da sua mãe é de 30 anos, e compreende também que, tal como está presente no enunciado, a mãe terá o triplo da idade da filha, daí utilizar os múltiplos de 3 como hipóteses para a idade da mãe da Alice. De seguida pensa que se a Alice tem um terço da idade da sua mãe, então basta dividir a idade da mãe por 3, e calcula por fim a diferença entre as idades. Se a diferença for de 30, tal como havia calculado no início, essa seria a resposta correta. Com esta resolução, o aluno mostra que sabe o que está a fazer e o que quer encontrar, apenas demonstra também que não sente um grande à vontade com as equações.

O mesmo veio a verificar-se na entrevista feita ao par 7. No início da resolução da questão 2 (Figura 5), estando eu por perto do respetivo par de alunos, surgiu este pequeno diálogo:

A – Eles podiam ter comprado igual tipo, eles podem ter comprado 5, 5.

B – Não, porque a Alice comprou o dobro.

P – Pois.

B – Então um comprou 2 e o outro 8.

A – Não, não pode ser. Não é o dobro. Então, o que é que nós sabemos daqui?

P – Então? O que é que nós sabemos daí?

A – Hm. Que os dois amigos, ao todo, compraram 10 livros, e depois a Alice comprou o dobro dos livros do Marco.

P – Certo. Então quantos é que comprou o Marco?

A – Pode ter comprado 4, 3, 2 ou 1. (Inicia os cálculos). Mas assim não pode ser.

Aqui, o aluno A demonstra claramente que compreende o enunciado, pois a Alice tinha comprado o dobro dos livros do Marco, logo não poderia ter comprado menos. De seguida, percebe que o problema é impossível, mas tem alguma dificuldade em explicar o seu raciocínio, e apenas depois disto decidiu passar a utilizar as equações.

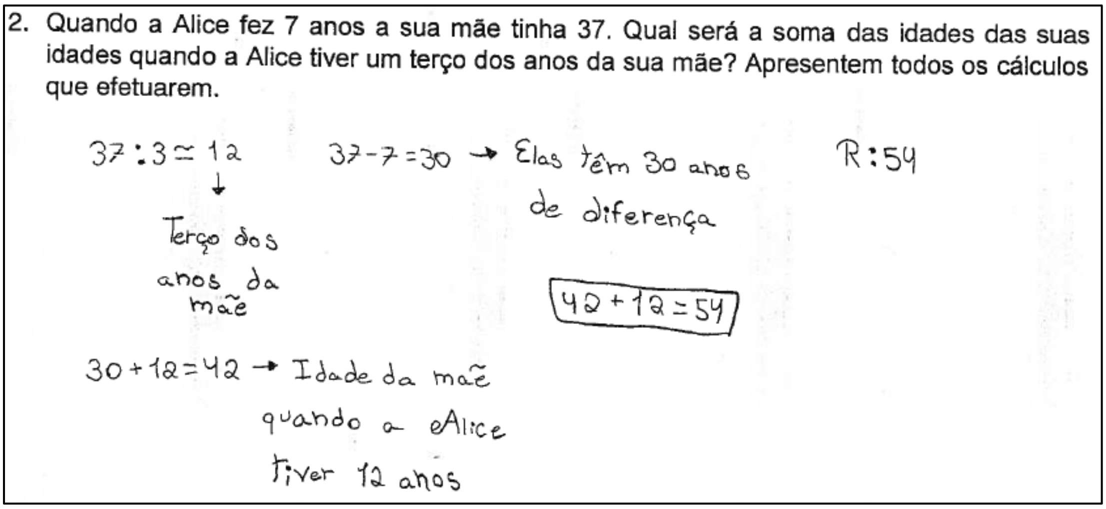
Análise das dificuldades

Nesta minha análise penso que se podem dividir as dificuldades que detetei na resolução de tarefas que envolvam equações do 1.º grau em dois grupos, sendo que o primeiro deles trata das dificuldades que os alunos sentem na resolução de tarefas de caráter problemático englobado em qualquer dos temas da Matemática. Neste primeiro conjunto estão englobadas dificuldades como a fraca compreensão dos enunciados dos problemas e a ausência de uma conclusão relativamente ao trabalho feito, isto é, de uma resposta à pergunta que é feita. Relativamente à segunda tipologia, encontram-se as dificuldades que estão ligadas aos conhecimentos da Álgebra, mais concretamente das equações. Neste grupo estão englobadas a adição incorreta de termos não semelhantes, a dificuldade da definição do significado da incógnita, entre outras.

Compreensão do problema

A dificuldade na compreensão do problema foi algo que se veio a manifestar em vários dos pares de alunos. Reparei que esta dificuldade nos alunos aparece logo no início da aula, momento da introdução da tarefa. A diferença entre lerem a tarefa para si próprios, tirando as dúvidas de seguida, e uma leitura coletiva fez-se notar no desenvolvimento do seu trabalho em torno das tarefas, pois a entoação colocada na leitura varia de aluno para aluno, e podem assim compreender as coisas de forma diferente.

A resolução que apresento abaixo da questão 2 da tarefa “As idades” por um dos alunos pertencentes ao par 3 (Figura 15) realça claramente essa dificuldade que os alunos têm.


2. Quando a Alice fez 7 anos a sua mãe tinha 37. Qual será a soma das idades das suas idades quando a Alice tiver um terço dos anos da sua mãe? Apresentem todos os cálculos que efetuarem.

37 : 3 ≃ 12 → Terço dos anos da mãe

37 - 7 = 30 → Elas têm 30 anos de diferença

R: 54

$\boxed{42 + 12 = 54}$

30 + 12 = 42 → Idade da mãe quando a eAlice tiver 12 anos

Figura 15 - Resolução de um aluno do Par 13 – Questão 2 – “As Idades”

Na presente resolução nota-se que a dificuldade do par 13 foi compreender o que lhes está a ser pedido no enunciado. Os alunos compreendem que a Alice vai ter de chegar a um terço dos anos da mãe, mas fazem o cálculo relativamente à idade da mãe neste momento, ou seja, descobrem quantos anos falta para que a Alice tenha um terço da idade atual da sua mãe.

Penso que esta é uma das grandes dificuldades relativamente à resolução de problemas em geral. Faz falta a alguns alunos uma maior capacidade de síntese, de forma a ultrapassar esta dificuldade.

Ausência de Resposta

A ausência de resposta às questões que as tarefas colocam aconteceu muito frequentemente na turma. Foram muito poucos os pares que tinham o hábito dar uma resposta às questões que lhes eram enunciadas, mesmo que em todas as correções que fui fazendo, em casa, das resoluções dos alunos, tenha deixado a nota de que se haviam esquecido de o fazer. Este facto torna-se mais preocupante relativamente a algumas tarefas problemáticas que lhes foram propostas ao longo da minha intervenção letiva, pois o facto de a resposta ser, em alguns casos, diferente da solução das equações que os alunos encontravam, fez com que não fosse possível ter a noção se eles saberiam o que procuravam. A ausência de resposta é, na maioria dos casos com que me deparei, um indício de uma dificuldade, que tanto pode ser a nível de compreensão do problema, como a tendência de identificar o fim do cálculo como a resposta ao problema.

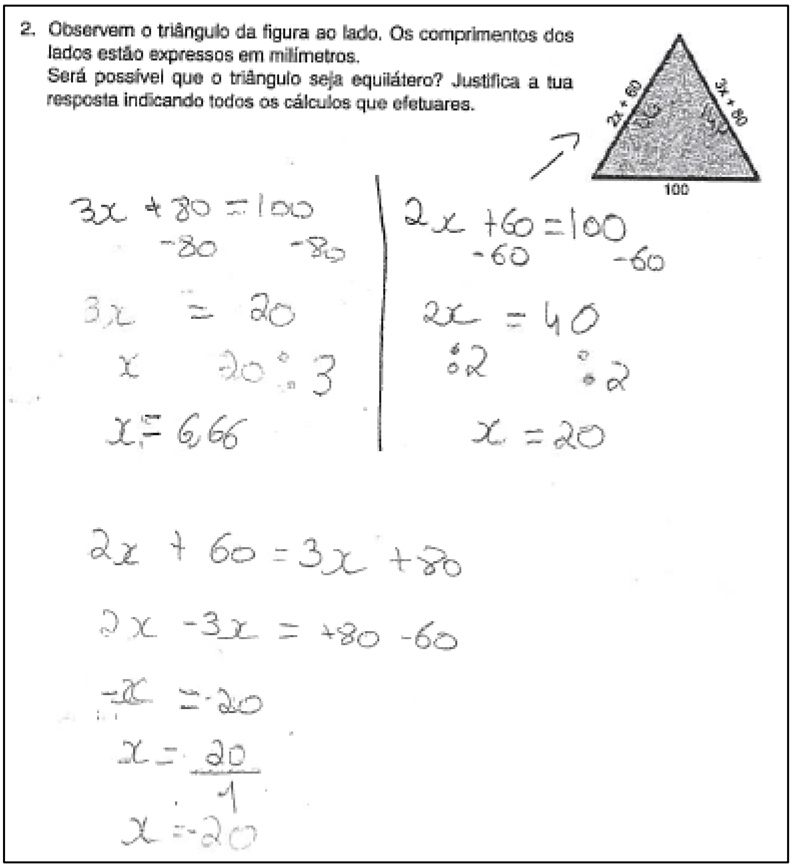

2. Observem o triângulo da figura ao lado. Os comprimentos dos lados estão expressos em milímetros.
Será possível que o triângulo seja equilátero? Justifica a tua resposta indicando todos os cálculos que efetuares.

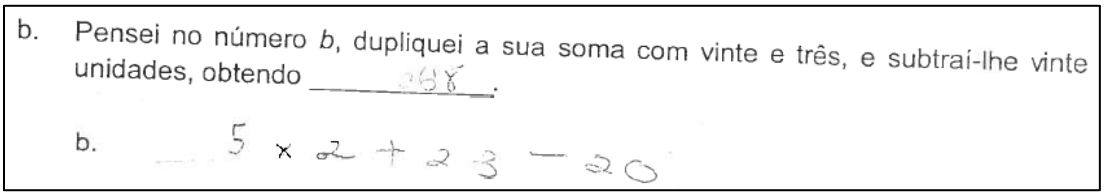
Figura 16 - Resolução Par 7 – questão 1 – "O Triângulo"

Nesta resolução da tarefa "O Triângulo" presente na Figura 16, os alunos fazem todo o cálculo algébrico corretamente, mas não se sabe o que estão a querer transmitir com o mesmo. Será que encontraram vários valores para a incógnita e por isso tenham assumido que o triângulo não era equilátero, ou será que não sabiam o que deviam de fazer e por isso decidiram resolver todas as equações que conseguiam retirar da imagem? Apesar de eu saber que alguns destes cálculos apenas foram feitos após um primeiro momento de discussão coletiva e de termos assim levantado a questão se seria possível o triângulo ser isósceles, não poderia deixar de salientar a ausência de resposta a qualquer questão, levantando a questão "A que conclusões chegaram?" nos documentos que lhes foram entregues na aula seguinte.

Esta é uma dificuldade que se denota na larga maioria dos alunos, sendo importante que seja desenvolvido um trabalho com os mesmos para que ganhem a consciência da importância que deve ser dada a uma resposta e que não basta escrever um monte de cálculos para que o professor considere que sabem o que estão a fazer. Não são apenas os fins que interessam, pois por vezes é o caminho percorrido para lá chegar que realmente importa.

Tradução algébrica de problemas

Outra das dificuldades que se fez notar nos alunos verificou-se na recusa em realizarem a tradução algébrica, pois os conhecimentos de resolução de equações parecem-me relativamente bem consolidados. Sempre que foi possível, os alunos tentaram evitar ter de traduzir um problema para a forma algébrica, tentando muitas das vezes utilizar outras estratégias de resolução. O facto de os alunos terem um leque variado de estratégias de resolução não é um problema, mas tentarem evitar sempre a Álgebra já o é. A realidade é que, por vezes, tentando esquivar-se desta estratégia, os alunos acabaram por se enganar em questões relativamente simples, tal como apresento abaixo (Figura 17).


b. Pensei no número *b*, dupliquei a sua soma com vinte e três, e subtraí-lhe vinte unidades, obtendo 268.

b. 5 × 2 + 23 − 20

Figura 17 - Resolução Par 3 – Questão 1.b) – "Será que vais conseguir descobrir?"

Na presente resolução o par 3, de forma a tentar não utilizar a Álgebra, decidiu resolver a problema através de operações inversas. Neste caso em particular, os alunos tinham de dar especial importância à ordem pela qual os cálculos deveriam ser feitos, tendo em conta as prioridades, ao invés de simplesmente seguirem o texto. Tal como demonstra a Figura 17, os alunos limitaram-se a passar o que estava escrito para a forma numérica, acabando assim por errar esta questão, pois não compreenderam onde estariam as prioridades.

Foram vários os alunos que ao longo de toda a minha intervenção letiva tentaram evitar a utilização das equações, seguindo esse caminho apenas quando a própria questão lhes exigia isso mesmo. Apesar disso, sempre que utilizaram as aprendizagens sobre o tema a seu favor, os alunos acabaram por sair recompensados com resoluções mais ricas.

Definição da incógnita

Esta é, na minha opinião, a maior dificuldade dos alunos na resolução de problemas que envolvem equações do 1.º grau. Apesar de não ser uma dificuldade que afete muitos alunos, pois alguns deles compreendem com relativa facilidade qual deve ser a sua incógnita, dando-lhe um significado correto, o grau de complexidade sentida por parte de outros pode ser um fator para que se tentem afastar das equações.

Uma tarefa de caráter problemático deve ser muito bem preparada e compreendida antes de iniciar o trabalho em torno da mesma, e para isso os alunos devem sentir-se à vontade relativamente à definição da incógnita que cujo valor decidem ter de descobrir.

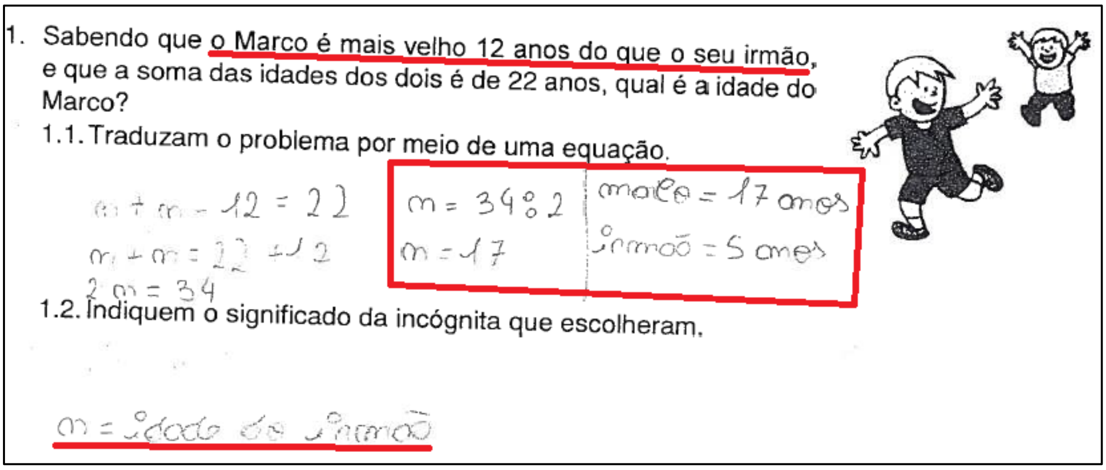


Figura 18 - Resolução de um aluno do Par 12 – Questões 1.1 e 1.2 – "As Idades"

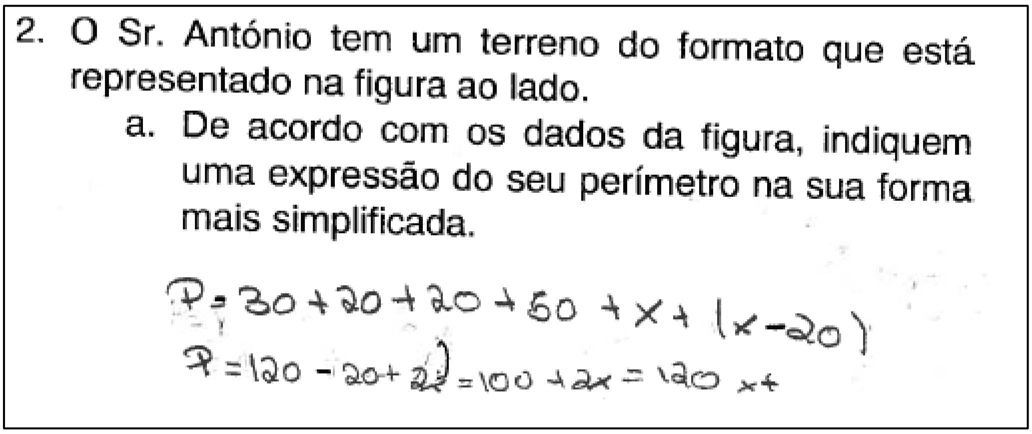
A resolução da questão 1.1 por do aluno do par 12 (Figura 18) está correta, tendo ele feito até mais do que lhe era pedido. Pode-se então comprovar que, chegando a uma equação, os alunos não apresentam dificuldades na sua resolução, mesmo não lhes sendo pedido que o fizessem. Na sua resolução, o aluno escreve, corretamente, que o Marco tem 17 anos e que o seu irmão tem 5 anos, tendo anteriormente chegado à equação "n=17". De seguida, na questão 1.2, sendo-lhe perguntado qual é o significado da incógnita, o mesmo aluno escreve que se trata da idade do irmão. Nota-se assim que há uma certa confusão relativamente ao significado da incógnita com que decidiu trabalhar.

Adição incorreta de termos não semelhantes

Tal como é referido por Kieran (citado em Ponte, Branco & Matos, 2009), a adição incorreta de termos não semelhantes é uma das dificuldades que os alunos podem sentir ao longo do seu caminho pela Álgebra. Apesar de ser um aspeto relativo a uma pequena parte da turma, pareceu-me igualmente importante fazer uma análise do mesmo, tentando compreender melhor o pensamento do aluno, e de que maneira poderá esta dificuldade ser ultrapassada.

Na Figura 19 está o caso de um aluno que faz uma adição de termos não semelhantes. O par de alunos coloca corretamente a soma de todos os lados do terreno do Sr. António, e quando começa a proceder à sua simplificação chega a um passo onde fica com a expressão "100 + 2x". Decide então dar mais um passo, tentando simplificar ainda mais a expressão com que estava a trabalhar, chegando a um resultado "120x +" que apesar de não se compreender onde quer chegar, denota-se já o erro ao chegar ao 120x.

Esta foi uma dificuldade que apenas se verificou na primeira aula da minha intervenção letiva, ultrapassada pelo par com alguma facilidade, podendo ter sido apenas uma distração dos mesmos. Ainda assim, o facto de ser uma dificuldade bem real no ensino das equações, penso que foi importante o esclarecimento feito com o grupo.


2. O Sr. António tem um terreno do formato que está representado na figura ao lado.
   a. De acordo com os dados da figura, indiquem uma expressão do seu perímetro na sua forma mais simplificada.

$P = 30 + 20 + 20 + 50 + x + (x - 20)$

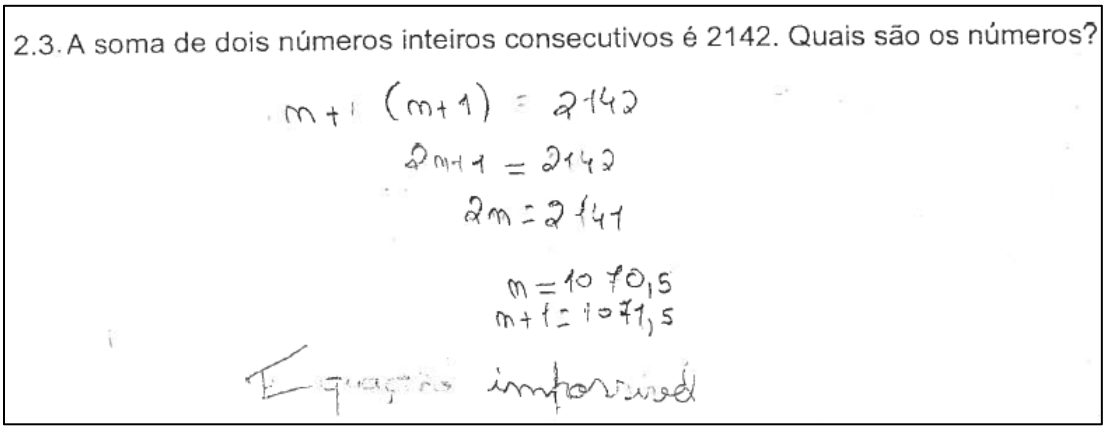
$P = 120 - 20 + 2x = 100 + 2x = 120\ x+$

Figura 19 - Resolução Par 7 – Questão 2.a) – "A Álgebra na Geometria"

Classificação de equações

A última dificuldade que senti o dever de analisar nesta minha investigação foi na classificação de equações, e na compreensão dos alunos do significado de cada tipo de equações. Tendo a noção da possibilidade de ainda existirem aprendizagens que não estivessem bem consolidadas, sendo esta uma delas, foram colocadas algumas questões para as quais não haveria uma solução, mas que ainda assim as suas equações seriam possíveis, como é o caso apresentado na Figura 20.

A questão colocada envolvia a soma de dois números inteiros consecutivos, tendo toda a turma chegado com alguma facilidade à solução da equação.


2.3. A soma de dois números inteiros consecutivos é 2142. Quais são os números?

$m + (m+1) = 2142$

$2m+1 = 2142$

$2m = 2141$

$m = 1070,5$

$m+1 = 1071,5$

Equação impossível

Figura 20 - Resolução Par 12 – Questão 2.3 – "Será que vais conseguir descobrir?"

Seguidamente, ao repararem que afinal se tratava de dois números decimais, alguns dos pares de alunos assumiram, tal como o Par 12, que a equação era impossível.

A compreensão de que um problema que o professor nos coloca não tem uma solução, isto é, é impossível encontrar um valor que satisfaça os dados e as condições do problema, nem sempre é fácil. Chegando a um resultado convincente, tal como aconteceu, e tendo-se falado da classificação das equações há relativamente pouco tempo e as ideias acerca do assunto ainda não estarem bem consolidadas, faz com que se tomem conclusões das quais não se sentem muito seguros.

Esta dificuldade foi também a mais saliente na entrevista com os dois pares de alunos, na resolução da questão que está representada na Figura 5. Veja-se por exemplo o seguinte excerto retirado da entrevista realizada ao par 7:

A – Aqui (apontando para a incógnita) é o número de livros comprados pelo Marco, então vai ser 2 vezes o número de livros comprados pelo Marco. Depois aqui, como é que eu passo daqui para aqui? São 3 vezes o número de livros comprados pelo Marco.

B – Sim. Então, o Marco pode ter comprado só…

A – Então diz-se equação impossível.

P – A equação impossível?

A – Então como é que eu vou responder? Vou dizer o quê?

B – Então é possível determinada.

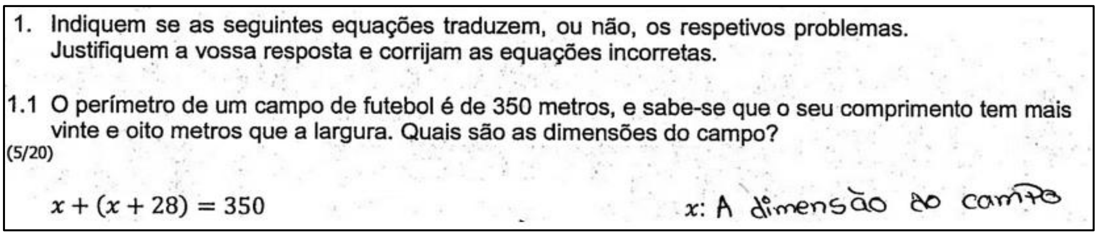
P – É possível determinada, deu 3,33333. Deu a mesma coisa aos 2. Então a equação não é impossível.

Através deste breve diálogo, pode-se notar que a compreensão da diferença entre uma equação impossível e um problema que não tem solução foi uma das dificuldades pelas quais grande parte dos alunos teve de passar, sendo que aproveitando os erros dos alunos pode chegar-se a aprendizagens mais significativas para os mesmos. Aprendendo através dos próprios enganos, poderá fazer com que os alunos percam o medo de errar, tornando-se assim mais participativos nas aulas.

Análise do Mini-Teste

O Mini-Teste foi realizado por 13 pares de alunos e 1 trio, no final da minha última aula da intervenção letiva, e tinha como principais objetivos aferir dois aspetos ligados às equações, que são a tradução algébrica de problemas e a definição do significado da incógnita. A mobilização dos seus conhecimentos acerca destes dois aspetos foi posta à prova ao longo de quatro questões, cada uma delas sobre os vários temas trabalhados nas aulas. Compreendo agora que fui demasiado ambicioso relativamente ao momento de avaliação, pois, para além de se ter verificado a tarefa ser demasiado longa, a complexidade das questões e do que era pedido aos alunos era muito elevada, pedindo-lhes um tipo de trabalho a que não estavam habituados. Apesar de todos os pontos negativos do Mini-Teste, os resultados recolhidos foram abaixo do que esperava, consegui retirar alguma informação sobre a qual decidi fazer uma análise, tal como tinha feito das restantes tarefas.

Com a questão 1, surgiu a primeira, e maior, dificuldade dos alunos, a definição do significado da incógnita (Figura 21).


1. Indiquem se as seguintes equações traduzem, ou não, os respetivos problemas. Justifiquem a vossa resposta e corrijam as equações incorretas.

1.1 O perímetro de um campo de futebol é de 350 metros, e sabe-se que o seu comprimento tem mais vinte e oito metros que a largura. Quais são as dimensões do campo?
(5/20)

$x + (x + 28) = 350$ x: A dimensão do campo

Figura 21 - Resolução Par 10 – Questão 1.1 – Mini-Teste

Tal como está representado na figura acima, o par 10 definiu x como sendo a dimensão do campo, e daqui o professor pode, e deve levantar várias questões. Será que os alunos simplesmente estavam distraídos e enganaram-se, ou será que não compreende realmente o que está a fazer e qual é o significado de x?

Esta foi a dificuldade que mais clara ficou com a realização do Mini-Teste, o que faz com que se adivinhe que, no 8.º ano, o professor de Matemática que venha a acompanhar a turma terá de realizar um trabalho muito pormenorizado relativamente a este tema, pois a inclusão de uma nova incógnita poderá a vir a confundir ainda mais os alunos

A pergunta seguinte tornou muito mais claro uma realidade muito positiva, que foi o facto de uma considerável parte dos alunos ter compreendido ao longo das aulas como devem fazer a tradução algébrica das tarefas problemáticas que lhes são apresentadas, o que deve ser feito primeiro, isto é, quais as prioridades que devem ser tidas em conta na equação.

1.2 Pensei num número *p*. Multipliquei por dois quintos a sua soma com oitenta e quatro, depois subtrai-lhe treze e obtive quarenta e três. Em que número pensei?

(5/20)

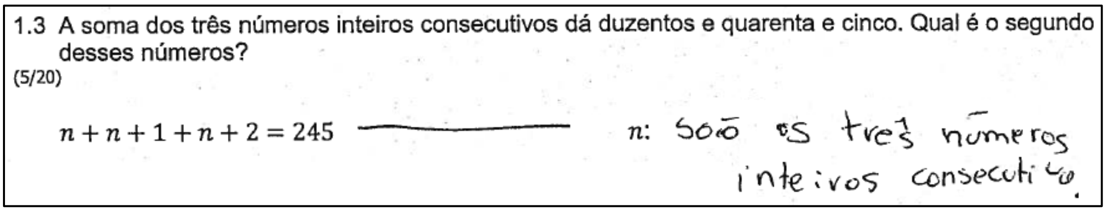
$\frac{2}{5} \times p + 84 - 13 = 43$ $\quad \frac{2}{5} \times (p + 84) - 13 = 43$ $\quad$ *p*: Número que pensei

R: Não traduz o Problema. Porque na 1ª equação faz-se 1º a multiplicação e não é assim que o Problema diz.

Figura 22 - Resolução Par 5 – Questão 1.2 – Mini-Teste

No caso da Figura 22, mais do que salientar a boa tradução algébrica que levou à correção que os alunos do par 5 fazem da equação presente no enunciado do Mini-Teste, pois era pedido que em caso de erro deveriam escrever a equação correta, penso que é importante salientar a clareza da resposta que decidiram dar. Para além de informar que a presente equação não traduz o problema mencionado na questão 1.2, os alunos têm o cuidado de explicar qual é o erro que é cometido. Nota-se assim que o trabalho realizado na aula 4 através da tarefa "Será que vais conseguir descobrir?", no qual aprenderam com os próprios erros praticados na questão 1, ainda está bem fresco nas suas memórias.

Por fim, a questão 1.3 (Figura 23) levantou uma dificuldade que ainda não tinha aparecido durante nenhuma das aulas, e que penso ser importante trabalhá-la.


1.3 A soma dos três números inteiros consecutivos dá duzentos e quarenta e cinco. Qual é o segundo desses números?
(5/20)

$n + n + 1 + n + 2 = 245$ —— n: são os três números inteiros consecutivos.

Figura 23 - Resolução Par 13 – Questão 1.3 – Mini-Teste

É possível relacionar esta dificuldade com a apresentada na Figura 21, pois tanto num caso, como no outro, os pares identificam a incógnita como podendo tomar mais que um valor. No entanto, ao passo que na questão 1.1 me parece que foi um caso de distração, ou mesmo de dificuldade na definição da incógnita, penso que a dificuldade que o par 13 apresentou nesta questão está mais ligada a, como refere Kieran na sua tabela (citado em Ponte, Branco & Matos, 2009) (Tabela 1), “Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número”. Esta dificuldade, apesar de nova na turma, é carente de ser prontamente esclarecida, podendo o par de alunos estar a confundir vários outros conceitos, como a diferença entre uma incógnita e uma variável.

Reflexão

O estudo de cariz investigativo

As estratégias dos alunos

Através da análise dos dados recolhidos ao longo da minha intervenção letiva, cheguei a algumas conclusões acerca das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvam equações do 1.º grau. Em primeiro lugar, posso assumir que é de extrema importância facultar aos alunos o maior número de estratégias possível, para que estes passem a sentir-se mais à vontade na resolução de tarefas de caráter problemático. Quanto maior for o leque de ferramentas e de formas de resolução dos alunos, melhor e mais produtivos se tornarão os momentos de discussão coletiva, permitindo que de lá surjam aprendizagens mais significativas e duradouras.

A primeira das estratégias que me parece importante salientar, e aquela que é mais recorrentemente utilizada pelos alunos nas suas resoluções, é a utilização das operações inversas. Penso que esta estratégia utilizada pelos alunos pode servir como uma ótima base num momento mais introdutório das equações e dos seus princípios de equivalência. Aproveitando este tipo de estratégia, que já tinha sido utilizada em anos anteriores, poderá ser mais simples para os alunos compreenderem estes assuntos.

Em segundo lugar, a tradução algébrica de problemas, e respetiva resolução, devem ser tidos em conta no ensino do 7.º ano de escolaridade, pois através da resolução de problemas é possível motivar e envolver mais ativamente os alunos e as grandes aprendizagens acabam por surgir, tornando-se assim mais significativas e duradouras. Os professores devem, na minha opinião, dedicar mais tempo das suas aulas à resolução de problemas interessantes não só a nível matemático, mas também envolvendo a realidade dos alunos, e, consequentemente, trabalhar desde cedo a tradução matemática de problemas com os alunos. Com uma boa tradução, os alunos sentir-se-ão mais motivados e confiantes, o que levará a uma relação mais positiva entre os alunos e a Matemática. Se os alunos não sentirem dificuldades na tradução dos problemas, os dados que recolhi permitem-me assumir que grande parte não sentirá muitas dificuldades na resolução das equações, quer seja através da utilização direta dos princípios de equivalência, quer seja através do esboço de balanças, salientando o “equilíbrio” existente entre os dois membros.

A verificação das estratégias de resolução e dos resultados obtidos é também uma muito importante para os alunos, pois é um procedimento que lhes torna possível perceber se a sua resolução da equação está correta. Penso que deve ser dado um elevado nível de atenção a esta verificação por parte dos alunos, relembrando-lhes a importância de se autocorrigirem, tornando-os mais criteriosos e atentos durante as suas resoluções. Na minha opinião, o professor deve sempre deixar que sejam os próprios alunos a resolver e a corrigir as tarefas, permitindo assim que desenvolva a sua autonomia, autoconfiança e que trabalhe o seu espírito crítico e a sua comunicação matemática, através do debate sobre as várias estratégias com os seus colegas.

A utilização de balanças é também uma estratégia interessante e que pode ser utilizada com os alunos que apresentam uma maior dificuldade na resolução de equações. O facto de poderem imaginar um objeto que conhecem, pode tornar mais simples a compreensão dos princípios de equivalência com a analogia com o "equilíbrio" dos pratos na balança que se tem de manter sempre de passo para passo ao longo de toda a resolução. Esta é uma ferramenta que deveria existir nas escolas para que os professores as pudessem utilizar com uma maior regularidade, pois torna-se mais simples para os alunos compreender os acontecimentos se tiverem a oportunidade de ver.

Por fim, uma das estratégias mais utilizadas pelos alunos foi a utilização dos princípios de equivalência, e penso que tenha sido a que melhor conseguiram compreender. Ainda que tenham a necessidade de anotar todos os passos que vão realizar na resolução da equação, os alunos transmitiram sempre uma grande confiança na utilização deste processo. Acredito que com a sua progressão escolar, os alunos irão deixar de utilizar esse tipo de anotações, passando a realizá-los apenas na sua mente.

As dificuldades dos alunos

Ao nível das dificuldades dos alunos começo por defender que, tal como defendi ao longo da minha análise, elas devem ser separadas em dois níveis diferentes. Num primeiro nível, encontram-se as dificuldades relativas à resolução de quaisquer tarefas problemáticas, não apenas das que envolvem equações do 1.º grau. Neste grupo, enquadram-se dificuldades como a compreensão dos problemas e a tendência para assumir o resultado dos cálculos como resposta ao problema. Relativamente à primeira, quando, o aluno não compreende o que deve fazer, faz com que se sinta desamparado e com uma grande falta de confiança, o que o fará querer afastar-se da resolução das tarefas propostas e, progressivamente, da Matemática. Penso que os professores não devem deixar que tal aconteça, pois acredito que a Matemática pode ser uma disciplina mais acolhedora e acessível aos alunos. Ao invés disso, os docentes da disciplina devem tentar fazer um trabalho mais próximo dos alunos que denotam esta dificuldade, principalmente durante o início da resolução de problemas, podendo aproveitar as apresentações das tarefas, deixando mais clara toda a informação que é dada em cada problema, e o que é desejado no mesmo. Relativamente à segunda dificuldade mencionada dentro deste nível, a tendência de assumir os resultados dos cálculos como resposta ao problema, penso que será mais fácil de ser trabalhada com os alunos, salientando as vezes em que, nas suas resoluções, os alunos não estão a encontrar a solução do problema. Em muitos casos, os resultados obtidos nos cálculos podem até ser a resposta para o problema, mas é importante que os professores façam crer aos alunos que as respostas às tarefas devem ser sempre dadas, pois é uma forma de tornar mais claro que o aluno sabe o que está a fazer e/ou o que procura.

No segundo nível de dificuldades que me parece existir, encontram-se as que estão ligadas às equações de 1.º grau. Uma entre as que penso que devem merecer maior destaque refere-se ao significado da incógnita. Esta é uma dificuldade de um elevado número de alunos, o que fará com que outras dificuldades se tornem também elas mais notórias, como é o caso da tradução algébrica de problemas. Estas dificuldades andam muitas das vezes unidas, e cabe ao professor procurar que os alunos as ultrapassem. Como? Na minha opinião através do treino e do trabalho desenvolvido na sala de aula. Os alunos não estão habituados a tarefas de caráter problemático, sendo as tarefas que apenas incidem em exercícios de aplicação mais ou menos direta dos conhecimentos trabalhados em aula as que normalmente predominam nas escolas, algo que cada professor de Matemática deve tentar evitar, pois é esse um dos fatores que faz com que os alunos se desinteressem pela disciplina. As máquinas são programadas para fazer as coisas sempre da mesma maneira, mas os alunos não são máquinas, e devem ter a liberdade de dar largas à sua imaginação e poderem também eles fazer Matemática.

A adição de termos não semelhantes foi também uma das dificuldades que os alunos tiveram de ultrapassar. A introdução das "letras", como os alunos dizem, no meio dos números causa problemas de compreensão nos alunos, e para isso o professor pode iniciar este trabalho com tarefas com exemplos mais concretos e que aprofundem a adição de monómios semelhantes com casos mais práticos para os alunos, como por exemplo com sólidos geométricos em que só podemos juntar os que são iguais, ou com animais que não podem estar juntos. Acredito que desta forma, os alunos têm a possibilidade de se autocorrigir e compreender melhor os conteúdos que estão a ser trabalhados.

Dentro deste grupo existem ainda outras dificuldades que me parecem importantes de ser trabalhadas, como é o caso da dificuldade em classificar as equações. A colocação de problemas que não tenham solução é um bom teste para colocar as aprendizagens dos alunos à prova. Este foi um dos casos que utilizei ao longo das minhas intervenções letivas, e reconheço que se revelou sempre muito produtivo. Em muitos casos, os alunos confundem o conceito de equação impossível, que aprenderam anteriormente, com o facto de a solução da equação não fazer sentido no contexto do problema. Esta é mais uma ferramenta que pode ser utilizada pelos professores para clarificar as dúvidas dos alunos, para que se tornem aprendizagens mais significativas, e que passarão a ser empregues pelos alunos com uma maior frequência.

Algumas outras dificuldades como o significado do sinal de igual ou a mudança de membro de um dos termos sem a alteração de sinal não foram tão salientes ao longo das aulas que lecionei, mas ainda assim é importante que não sejam esquecidas. Penso que estas dificuldades não apareceram tanto devido ao facto de terem trabalhado muito bem os princípios de equivalência e ter sido dada uma grande importância inicial à utilização de balanças. Esta é uma boa maneira de ultrapassar este tipo de dificuldades, o que permite que a resolução de problemas que envolvem equações se torne mais simples, sendo ao mesmo tempo mais cativante, pois quando os alunos se sentem desafiados tendem a fazer um trabalho mais produtivo.

A experiência da lecionação

Ter a oportunidade de lecionar um conjunto de aulas consecutivas à turma 7.º D foi uma das experiências mais marcantes que tive. Cada momento da aula foi, por mim, aproveitado ao máximo, desde os momentos de introdução em que tive de ser por vezes eu a levantar algumas perguntas para que os alunos se desinibissem e colocassem as suas questões, passando pelos momentos de trabalho autónomo, em que tive a oportunidade de escutar tantas estratégias e tantas ideias que iam fluindo nas mentes dos alunos enquanto preparavam as suas resoluções que depois teriam de defender acerrimamente nas discussões coletivas que, para mim, foram os momentos altos de todas as aulas. Ver a forma como os alunos debatiam entre si, e o à vontade que sentiam em colocar questões relativamente às resoluções dos colegas, querendo até por vezes ir mais fundo na questão e produzir novos conhecimentos matemáticos, foram para mim extremamente gratificantes, e acredito que é para momentos como estes que os professores continuam a lecionar.

Do ponto de vista organizacional, nunca imaginei que dar aulas envolvesse um processo tão complexo. Desde a preparação das tarefas e dos respetivos planos de aula, materiais que tanto os professores me "empurravam pelos olhos a dentro" e nunca tinha percebido a sua verdadeira utilidade. Agora, não diria que são materiais úteis, mas sim que são muito mais que isso. São extremamente "NECESSÁRIOS" para que se realize uma boa aula e para que se vá muito melhor preparado para cada uma delas. Só assim é que os professores deviam poder entrar em cada sala de aula, pois os seus alunos merecem o esforço e dedicação. Cada tarefa produzida, e cada plano de aula trabalhado, foi um passo de gigante na minha formação e para me poder vir a tornar num melhor professor.

Um dos fatores que acho importante salientar é o facto de que as tarefas concebidas por mim não haviam sido utilizadas anteriormente, o que vejo como um ponto a melhorar, pois após ter tido a experiência de trabalhar em torno delas com a turma, reconheço alguns pontos fracos nas mesmas e que se voltar a utilizar serão, seguramente, tidos em consideração.

Penso que é importante fazer referência às principais dificuldades que senti ao longo do trabalho. Para além do tempo de aula na maioria das vezes parecer curto demais, pois tinha sempre material para aprofundar mais os conhecimentos dos alunos, tanto produzido por mim anteriormente, como pelos próprios alunos, através das partilhas nos momentos de discussão, foi o duplo papel de professor e de investigador aquele em senti maior dificuldade. A preocupação constante com as aprendizagens dos alunos e com o tempo de aula que me ia restando, impossibilitou-me diversas vezes de cumprir com o papel de investigador que esperava poder vir a desempenhar. Ainda assim, penso que as aprendizagens dos alunos não foram prejudicadas, o que era o mais importante.

Por fim, resta-me agradecer mais uma vez aos alunos do 7.º D pelo fantástico trabalho que desempenharam e por toda a ajuda que me deram. Todos eles, sem exceção, são jovens espetaculares e com muitas potencialidades, que bem empregues, os irão levar muito longe. A eles, um enorme OBRIGADO!

Termino então da mesma maneira que iniciei este meu caminho pelo mestrado, e com a certeza da frase que dei na minha apresentação inicial: “Acredito que a Matemática é muito mais divertida do que se tem ensinado nas escolas.”.

Referências

Abrantes, P. (1985). *Planificação no Ensino da Matemática*. Acedido em http://www.netprof.pt/netprof/servlet/getDocumento?TemaID=NPL070103&id_versao=11892

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-10 e 35.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A. & Barbosa, E. (s. d.). *Pensamento Algébrico e exploração de Padrões*. Acedido em http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf, a 24 de dezembro 2015.

Branco, N, & Ponte, J. P. (2013). Analysis of Teaching and Learning Situations in Algebra in Prospective Teacher Education. Acedido em http://revistas.rcaap.pt/sisyphus/article/view/3711/2865

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A. P., & L., Santos (2012). *Explorar tarefas matemáticas*. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Orgs.), *Investigação em Educação Matemática. Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99-104). Portalegre: SPIEM. Acedido em http://www.rdpc.uevora.pt/bitstream/10174/8305/1/Canavarro%20%26%20Santos%20EIEM2012.pdf

Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristóvão E. (2005). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In Seminário Luso-Brasileiro: *Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores*. Acedido em ftp://ftp.cefetes.br/cursos/Matematica/Alex/06-Um%20estudo%20das%20potencialidades%20pedagogicas.pdf

Fiorentini, D., Miorim, A. & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar… a educação algébrica elementar. *Pro-posições, 4(1),* 78-90.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N. & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo, B. Alfonso, M. Machín & L. B. Nieto (Eds.*), Investigación en educación matemática XII* (505-516). Badajoz: SEIEM. MEC (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: MEC

Melara, R. (2008). *O Ensino de Equações do 1º grau com significação: uma experiência prática no ensino fundamental.* PDE – Colégio estadual Leonardo Da Vinci.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. (Trad.) Lisboa: APM. (obra original publicada em 2000).

Polya, G. (1967). *O ensino por meio de problemas*. Acedido em http://ucbweb.castelobranco.br/webcaf/arquivos/13381/6450/TRProblemas_02.pdf.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação. *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J.P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J. P., & Henriques, A. (2013). Problem posing based on investigation activities by universitystudents. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 145-156.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377. Acedido em: http://hdl.handle.net/10451/22606

Schoenfeld, A. Por que toda esta agitação acerca da Resolução de Problemas? In: Abrantes, P.; Leal, L. C.; Ponte, J. P. (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61 – 72). 1996. Lisboa: APM e Projecto MPT (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

Sperafico, Y.; Golbert, C. (2011). Refletindo sobre os erros na resolução de problemas envolvendo equações algébricas do 1º grau: uma experiência com alunos do Ensino Fundamental. In: EDUCERE-X Congresso Nacional de Educação, Curitiba: PUCPR. Acedido em http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/5291_2797.pdf

Anexo 1 - Tarefas

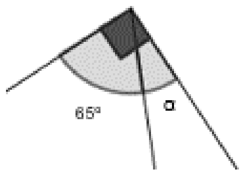
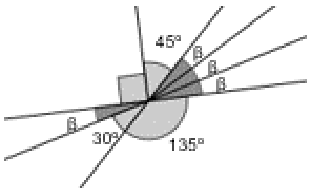
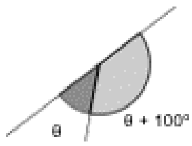
A Álgebra na Geometria I

ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 **matemática**

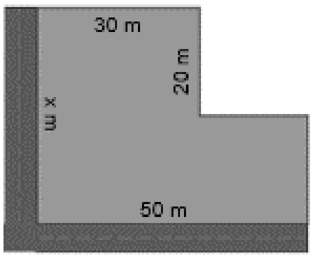
ID : ________________________ sete

A Álgebra na Geometria I

1. Qual a amplitude dos ângulos α, β e θ?

a. 	b. 	c. 

2. O Sr. António tem um terreno do formato que está representado na figura ao lado.



   a. De acordo com os dados da figura, indiquem uma expressão do seu perímetro na sua forma mais simplificada.

   b. Traduzam por meio de uma equação: "O perímetro do terreno do Sr. António é de 180 metros".

   c. O sr. António decidiu colocar uma rede na parte do terreno que se encontra junto à estrada. Ajudem o sr. António a descobrir quantos metros de rede precisa comprar?

   d. Qual é a área do terreno do Sr. António?

(Trabalho realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática do IE/FCUL por Pedro Mateus)

O Triângulo

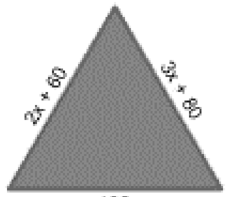
ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 **matemática**

ID : ______________________________

sete

O Triângulo

1. Observem o triângulo da figura ao lado. Os comprimentos dos lados estão expressos em milímetros.
   Será possível que o triângulo seja equilátero? Justifica a tua resposta indicando todos os cálculos que efetuares.



(Trabalho realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática do IE/FCUL por Pedro Mateus)

A Álgebra na Geometria II

ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 **matemática**

ID : ______________________

sete

A Álgebra na Geometria II

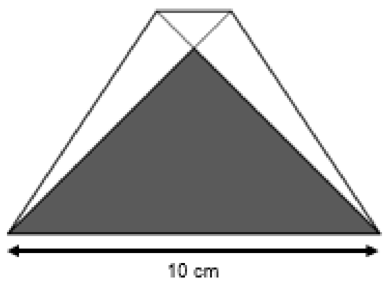
1. Resolve os seguintes problemas e, num pequeno texto, explica a tua resolução de cada um.

   a. Um quadrado tem 36cm de perímetro. Qual é a sua área?

   b. O perímetro de um quadrado com 12 cm de lado é igual ao dobro do perímetro de um triângulo isósceles de base 10 cm. Qual é o comprimento dos outros dois lados do triângulo?

   c. Um retângulo tem *h* cm de altura. O comprimento da sua base é igual à soma do dobro da sua altura com 20 metros. Sabendo que o perímetro do retângulo é de 100 m, qual é o comprimento da base?

   d. As diagonais do trapézio isósceles representado na figura aqui ao lado intersectam-se a cinco sextos da altura do trapézio. O triângulo a sombreado tem 25 cm^2 de área. Qual é a comprimento da altura do trapézio?



(Trabalho realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática do IE/FCUL por Pedro Mateus)

Será que vais conseguir descobrir?

ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 matemática

ID : ______________________

sete

Será que vais conseguir descobrir?

1. Quais serão os números?

1.1. Escolhe, ao acaso, três números, *a*, *b* e *c*, para cada uma das seguintes alíneas, e completa as afirmações de forma a torná-las verdadeiras.

a. Pensei no número *a*, calculei o seu quíntuplo, e de seguida adicionei-lhe quinze unidades, obtive ____________.

b. Pensei no número *b*, dupliquei a sua soma com vinte e três, e subtraí-lhe vinte unidades, obtendo ____________.

c. Pensei no número *c*, calculei a terça parte do produto entre *c* e nove e, de seguida, adicionei-lhe trinta e nove unidades, e obtive ____________.

1.2. Descobre o número que o teu colega imaginou.

a.

b.

c.

1.3. Discute com o teu colega como chegaste à tua resposta.

2. Escrevam uma equação que vos permita resolver cada um dos seguintes problemas, e indiquem a respetiva resposta:

   2.1. A soma do sêxtuplo de um número com dois é igual ao próprio número. Qual é o número?

   2.2. O triplo da diferença entre um número e quatro é igual ao dobro da soma desse número com três. Qual é o número?

   2.3. A soma de dois números inteiros consecutivos é 2142. Quais são os números?

   2.4. A soma de três números pares consecutivos é 246. Quais são os números?

(Trabalho realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática do IE/FCUL por Pedro Mateus)

As Idades

ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 **matemática**

FECB

ID : ______________________

sete

As Idades

1. Sabendo que o Marco é mais velho 12 anos do que o seu irmão, e que a soma das idades dos dois é de 22 anos, qual é a idade do Marco?
   1.1. Traduzam o problema por meio de uma equação.

   1.2. Indiquem o significado da incógnita que escolheram.

   1.3. Resolvam a equação.

   1.4. Qual é a idade do Marco?

2. Quando a Alice fez 7 anos a sua mãe tinha 37. Qual será a soma das idades das suas idades quando a Alice tiver um terço dos anos da sua mãe? Apresentem todos os cálculos que efetuarem.

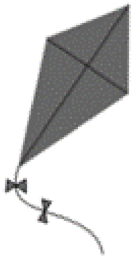
(Trabalho realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática do IE/FCUL por Pedro Mateus)

TPC

ID : ______________________

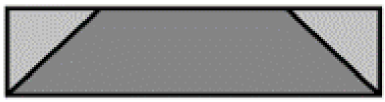
sete

1. A Rita vai com os seus pais fazer um piquenique no sábado. Para ela brincar durante o passeio, o seu pai decidiu construir-lhe um papagaio de papel como o que está representado na figura aqui ao lado. Para isso precisa de duas varetas, uma delas mede 40 centímetros e a outra tem mais x centímetros. Sabendo que o papagaio irá ficar com 40 dm^2 de área, qual será o tamanho da vareta maior.



   (A) 120 cm
   (B) 200 cm
   (C) 160 cm
   (D) 38 cm

2. A Rita decidiu criar um padrão, igual ao da imagem ao lado para colorir os seus cadernos da escola. Para fazer diferente dos seus colegas, ele decidiu desenhar um trapézio isósceles com 25 cm^2 de área e dois triângulos isósceles.



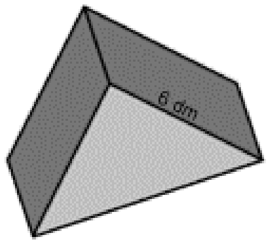
   a. Escolhe qual é a equação que te permite descobrir o tamanho da sua base maior B:

(I) $B \times 6 = 25$ (II) $(B + B - 12) \times 6 = 25$; (III)$(B + B - 12) \times 3 = 25$;

   b. Resolve a equação que selecionaste na alínea anterior.

   c. Determina a medida da base menor.

3. O Manuel e a Rita obtiveram soluções diferentes no seguinte problema:



"Na figura ao lado estão representados dois paralelogramos geometricamente iguais e um triângulo retângulo. A área da figura é de 54 dm^2. Qual será a altura, h, do paralelogramo?"

Descobre se algum dos 2 amigos tem razão. Caso seja necessário, corrige as suas resoluções.

Manuel:	Rita:
Como os paralelogramos são iguais, então o triângulo é isósceles e por isso a sua área é de 18dm^2. Como são 2 paralelogramos, temos de dividir a restante área por 2, ficando $36 \div 2 = 18$ dm^2. Portanto: $\frac{6 \times h}{2} = 18 \Leftrightarrow 6 \times h = 36 \Leftrightarrow h = 6$	Como o triângulo é retângulo, então sabemos que a sua área é $\frac{6 \times 6}{2} = 18$. Depois como então sobra $54 - 18 = 36$ dm^2. Assim, temos que: $6 \times h = 36 \Leftrightarrow h = 6$

(Trabalho realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática do IE/FCUL por Pedro Mateus)

A Álgebra está em todo o lado

ebspALBERTONETO – AE Queluz-Belas 2015/16 matemática

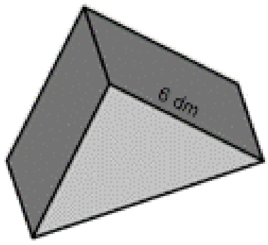
FECQB

ID : ____________________

sete

A Álgebra está em todo o lado

1. Dois amigos, o Marco e a Alice, obtiveram soluções diferentes no seguinte problema:
   "Na figura ao lado estão representados dois paralelogramos geometricamente iguais e um triângulo retângulo. A área da figura é de 54 dm². Qual é a altura do paralelogramo?"
   Descubram se algum dos dois amigos tem razão. Caso seja necessário, corrijam as suas resoluções.



Marco: Como os paralelogramos são iguais, então o triângulo é isósceles e por isso a sua área é de 18dm². Como são 2 paralelogramos, temos de dividir a restante área por 2, ficando $36 \div 2 = 18$ dm². Sabemos então que:

$$\frac{6 \times h}{2} = 18$$
$$6 \times h = 36$$
$$h = 6$$

R: A altura do paralelogramo é de 6 dm.

Alice: Como o triângulo é retângulo, então sabemos que a sua área é: $\frac{6 \times 6}{2} = 18.$
Depois, como sobra $54 - 18 = 36$ dm², temos que:

$$6 \times h = 36$$
$$h = 6$$

R: A atura do paralelogramo é de 6 dm.

2. Dois amigos compraram, em conjunto, dez livros. A Alice comprou o dobro dos livros do Marco. Quantos livros comprou a Alice?"

   a. Escrevam uma equação que te permita resolver o problema, explicando o significado de cada um dos termos da equação.

   b. Que resposta davam ao problema? Justifiquem.

   c. Então e se os dois amigos tivessem comprado 12 livros, qual seria a resposta do problema? Justifiquem a vossa resposta.

3. A soma das idades da Alice, do Marco e da Maria é 54 anos. A Maria tem o dobro da idade da Alice e o Marco tem menos 6 anos do que a Alice. Que idade tem cada um?

(Trabalho realizado no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática do IE/FCUL por Pedro Mateus)

Anexo 2 – Planos de Aula

Aula 1 – 9 de março de 2016

Plano de Aula – 09/03/2016

Tema: Resolução de Problemas – Equações do 1º Grau

Objetivos Específicos

- Resolução de problemas;
- Tradução algébrica de problemas;

Metodologia de Trabalho

- Trabalho a Pares

Capacidades Transversais

- Trabalho colaborativo;
- Descoberta;
- Autonomia;
- Autoconfiança;
- Comunicação Matemática;
- Espírito Crítico;
- Gosto pela matemática.
- Raciocínio matemático;
- Estabelecimento de conexões.

Recursos

- Tarefa – “A Álgebra na Geometria I;
- Quadro Branco e Marcadores;

Momentos de Aula

- Introdução da aula – 10 min;
- Trabalho Autónomo (Q1 e Q2) – 50 min;
- Discussão Coletiva (Q1 e Q2) – 30 min;

A Aula

Momento de Aula: Introdução da Aula

Tempo: 10 minutos

O professor deve aproveitar as potencialidades das novas tecnologias presentes na sala, como são o caso do computador e do projetor, tendo como finalidade esclarecer qualquer dúvida dos alunos. Deve preparar o quadro antes do início da aula, colocando todas as alíneas da questão 1, aproveitando a projeção para copiar os desenhos para o quadro, de forma a agilizar a aula, principalmente o momento de discussão coletiva.

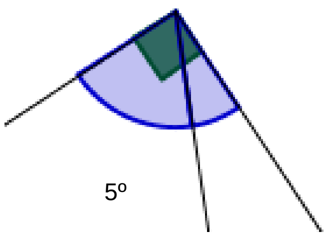
Após a entrada dos alunos na sala, ser-lhes-á entregue a tarefa para que seja lida em conjunto e para que possam colocar todas as questões que tiverem em mente. O professor deve aproveitar para denominar as letras que escolheu como incógnitas para a tarefa 1 (alfa, beta e teta), pois a maioria dos alunos não as consegue reconhecer. De seguida, os alunos iniciam a resolução da tarefa, para a qual terão 50 minutos.

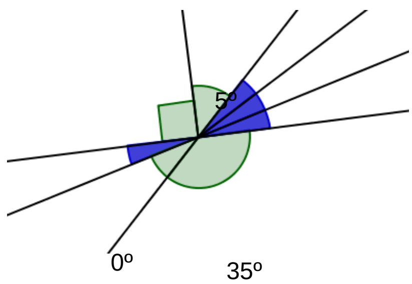
Momento de Aula: Trabalho Autónomo

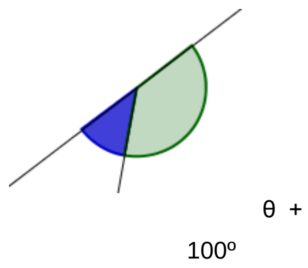
Tempo: 50 minutos

Tarefa

1. Qual a amplitude dos ângulos α, β e θ?







O enunciado pergunta qual será a amplitude de cada um dos ângulos α, β e θ. Não é delineada a possível resolução dos alunos, para que cada um possa fazê-lo da forma que se sentir mais à vontade (seja resolvendo equações, ou utilizando apenas operações inversas, ou até por tentativa e erro).

Possíveis resoluções:

a. Equação:

$$\alpha + 65° = 90° \Leftrightarrow \alpha = 90° - 65° \Leftrightarrow \alpha = 25°$$

Operações inversas:

$$90° - 65° = 25°$$
$$logo, \alpha = 25°$$

Tentativa e erro

b. Equação:

$$\beta + 30° + 135° = 180° \Leftrightarrow \beta + 165° = 180° \Leftrightarrow \beta = 180° - 165° \Leftrightarrow \beta = 15°$$

Ou

$$\beta + \beta + +\beta + 45° = 90° \Leftrightarrow 3\beta + 45° = 90° \Leftrightarrow 3\beta = 90° - 45° \Leftrightarrow 3\beta = 45° \Leftrightarrow \beta = 15°$$

Ou

$$3\beta + 90° + 45° = 180° \Leftrightarrow 3\beta = 180° - 135° \Leftrightarrow 3\beta = 45° \Leftrightarrow \beta = 15°$$

Ou

$$4\beta + 30° + 135° + 45° + 90° = 360° \Leftrightarrow 4\beta = 360° - 300° \Leftrightarrow 4\beta = 60° \Leftrightarrow \beta = 15°$$

Operações inversas:

$$180° - 135° - 30° = 15°$$

Ou

$$90° - 45° = 45°, \quad 45° \div 3 = 15°$$

Ou

$$180° - 90° - 45° = 45°, \quad 45° \div 3 = 15°$$

Ou

$$360° - 135° - 30° - 90° - 45° = 60°, \quad 60° \div 4 = 15°$$

Tentativa e erro

c. Equação:

$$\theta + \theta + 100° = 180° \Leftrightarrow 2\theta = 180° - 100° \Leftrightarrow 2\theta = 80° \Leftrightarrow \theta = 40°$$

Operações inversas:

$$180° - 100° = 80°, \qquad 80° \div 2 = 40°$$
$$logo, \theta = 40°$$

Tentativa e erro

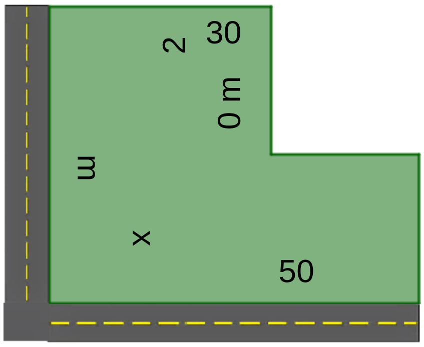
Razões que levaram a colocar esta questão

É muito importante que os alunos tenham a possibilidade de ver a ligação entre as Equações e as mais variadas áreas da Matemática, neste caso com a Geometria. Como a amplitude dos ângulos é uma das matérias que mais alunos conseguem compreender, sendo o fator visual uma grande ajuda para a aquisição desses conhecimentos, esta questão vai ao encontro do que é pretendido nesta primeira aula, dando aos alunos a liberdade de a resolverem utilizando o método que preferirem.

Dificuldades	Estratégias
• Os alunos não reconhecem as propriedades dos ângulos.	• Sabendo as propriedades dos ângulos (complementares, suplementares e opostos), os alunos fazem as respetivas somas, quer seja por meio de uma equação, de operações inversas, ou por tentativa e erro, e encontrando o valor da incógnita. • Com o auxílio do professor, os alunos recordam as propriedades dos ângulos, recorrendo de seguida a qualquer um dos métodos acima mencionados

Tarefa

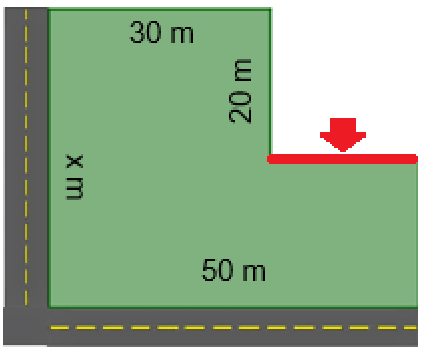
2. O Sr. António tem um terreno do formato que está representado na figura ao lado.
   a. De acordo com os dados da figura, indiquem uma expressão do seu perímetro na sua forma mais simplificada.



O enunciado pergunta qual será a expressão do perímetro do terreno do Sr. António e pede para que seja indicada na sua forma mais simplificada. Não é delineada a possível resolução dos alunos, para que cada encontre o método que lhe pareça mais favorável.

Possíveis resoluções:

I.



Para descobrir o lado assinalado a vermelho, os alunos podem utilizar:

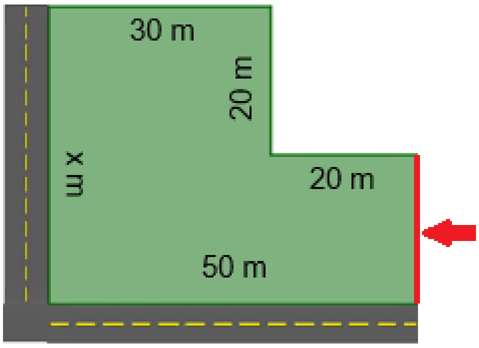
a. Equação: indicam uma incógnita para o lado vermelho (y) e depois calculam:

$$y + 30 = 50 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y + 30 - 30 = 50 - 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 20$$

b. Operações inversas:

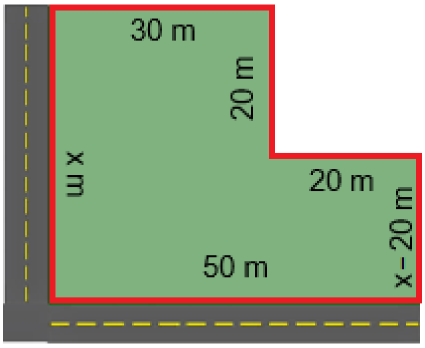
$$50 - 30 = 20$$

II.



Ao observar que o lado oposto ao que está agora representado a vermelho mede x metros, e sabendo que é igual à soma do lado vermelho com o de 20 metros que se encontra também na vertical, pode-se concluir, utilizando as operações inversas, que o lado vermelho mede: x – 20 m.

III.



No final, como já se sabe o comprimento de todos os lados, e como o que é pedido é o perímetro do terreno, tem-se:

$$x + 30 + 20 + 20 + x - 20 + 50 =$$
$$= x + x - 20 + 30 + 20 + 20 + 50 =$$
$$= 2x + 100$$

Razões que levaram a colocar esta questão

Os alunos sentem-se mais interessados ao saber que as questões que estão a resolver podem ser problemas da vida real, com os quais alguém poderá vir a deparar-se, precisando de o solucionar o mais depressa possível. No caso, o Sr. António vai precisar de ajuda para descobrir o perímetro do seu terreno, que virá a ser traduzido por uma expressão algébrica. Tenta-se, desta forma, criar novas estratégias para os alunos, mostrando-lhes a utilidade da Álgebra na resolução de problemas.

Dificuldades	**Estratégias**
	• Compreender a questão e utilizar um qualquer método para descobrir os comprimentos dos lados em falta e, de seguida, calcula o respetivo perímetro;
• Os alunos não compreendem a questão, então o professor deve tentar traduzi-la, fornecendo pequenas pistas, garantindo que compreendem os vários passos que terão de percorrer até descobrirem a expressão do perímetro.	
• Os alunos não conseguem descobrir o comprimento do lado calculado em I;	• Utilizar o material escolar dos alunos, exemplificando novos casos de como descobrir o comprimento desejado (Ex: caneta = lápis + borracha);
• Os alunos não conseguem descobrir o comprimento do lado calculado em II;	• Referir o método utilizado em I para calcular outro lado em falta;

<table>
<tr><th colspan="2">Tarefa</th></tr>
<tr><td colspan="2">b. Traduzam por meio de uma equação: “O perímetro do terreno do Sr. António é de 180 metros”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Utilizando a resposta da alínea anterior, os alunos apenas têm de transformar a expressão que encontraram, numa equação que respeite os dados que lhes são agora fornecidos.
Possível Resolução:
$2x + 100 = 180$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Razões que levaram a colocar esta questão</th></tr>
<tr><td colspan="2">Esta alínea foi colocada com a intenção de guiar os alunos na resolução de problemas através da Álgebra, neste caso mais específico, das Equações. Fazendo uma tarefa mais tutorial, mostrando todas as potencialidades que advêm da utilização deste método de resolução de problemas.</td></tr>
<tr><th>Dificuldades</th><th>Estratégias</th></tr>
<tr><td>• Os alunos não compreendem a expressão algébrica da alínea anterior;</td><td>• Ao compreender a expressão algébrica encontrada na alínea anterior, o aluno representa a igualdade entre a mesma e o perímetro que é mencionado no enunciado;
• Utilização de exemplos de perímetros de figuras que os alunos conhecem.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tarefa</th></tr>
<tr><td>c. O sr. António decidiu colocar uma rede na parte do terreno que se encontra junto à estrada. Ajudem o sr. António a descobrir quantos metros de rede precisa comprar.</td></tr>
<tr><td>Utilizando a alínea anterior, os alunos deverão chegar ao valor da parte do terreno que desconhecem. Ainda assim, é possível utilizarem outras formas de chegar ao resultado pretendido.

Possíveis resoluções:

a.
I. Descobrir o valor da incógnita x.
Para descobrir o valor da incógnita, os alunos têm de resolver a equação da alínea anterior.
$2x + 100 = 180 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x + 100 - 100 = 180 - 100 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 80 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x \div 2 = 80 \div 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 40$
II.
No final, os alunos devem reconhecer que a parte do terreno que se encontra junto à estrada é de 40 + 50 = 90 metros.</td></tr>
</table>

b.

Os alunos podem perceber que a parte do terreno que se encontra junto à estrada é exatamente metade do perímetro do terreno, ou seja, 90 metros.

Razões que levaram a colocar esta questão

Como a questão tem um caráter tutorial, espera-se que esta alínea faça com que os alunos encontrem a solução que os auxiliará a descobrir a resposta para a questão que lhes é colocada. É importante que o valor a que os alunos chegam não seja sempre a resposta ao problema, para que ganhem a noção da diferença entre solução da equação e solução do problema. Ainda assim, deixa-se em aberto a possibilidade da resolução por outros métodos, de forma a que sejam os alunos a escolher o caminho que preferirem.

Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não conseguem compreender a questão, então o professor deve apontar para a imagem e salientar o que interessa da seguinte forma: “Quais são os lados do terreno em que o Sr. António quer colocar a rede?”	• Através da imagem, os alunos compreendem que a rede necessária terá de ter de comprimento (x+50) m. Encontra o valor da incógnita x e, por fim, descobre os metros de rede que deseja; • Após compreenderem a questão, os alunos descobrem o valor da incógnita que dá sentido à equação e, de seguida, os metros de rede que serão necessários;

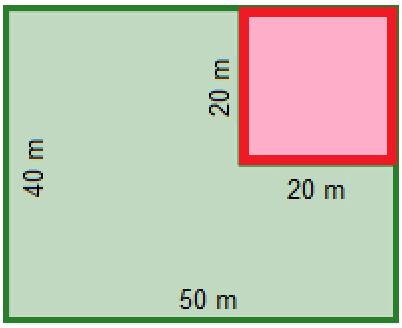
Tarefa

d. Qual é a área do terreno do Sr. António?

Utilizando os dados recolhidos na alínea anterior, os alunos têm a possibilidade de dividir o terreno da forma que mais lhes agradar, calculando, de seguida, a área do terreno.

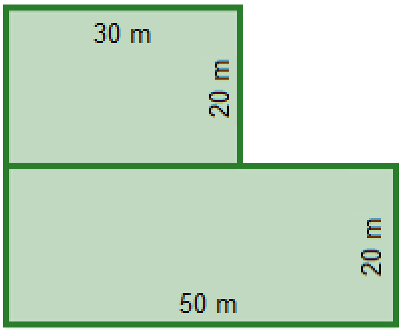
Possíveis resoluções:

a.



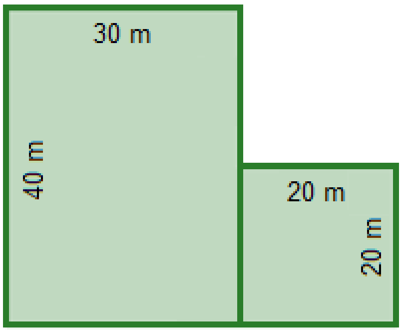
$$A_{verde} = 40 \times 50 = 2000\ m^2$$
$$A_{vermelho} = 20 \times 20 = 400\ m^2$$
$$A_{terreno} = 2000 - 400 = 1600\ m^2$$

b.



$$A_{pequeno} = 30 \times 20 = 600\ m^2$$
$$A_{grande} = 50 \times 20 = 1000\ m^2$$
$$A_{terreno} = 600 + 1000 = 1600\ m^2$$

c.



$$A_{pequeno} = 20 \times 20 = 400\ m^2$$
$$A_{grande} = 40 \times 30 = 1200\ m^2$$
$$A_{terreno} = 400 + 1200 = 1600\ m^2$$

Razões que levaram a colocar esta questão

Esta alínea obriga a que os alunos tenham encontrado a solução da equação presente na alínea b. Sabendo o comprimento de todos os lados do terreno do Sr. António, os alunos podem dividir o terreno de várias formas, o que permitirá uma discussão coletiva mais interessante, podendo vários alunos partilhar com a turma o seu método de resolução. Espera-se que, com estas questões, os alunos compreendam a importância que as equações podem tomar na resolução de problemas, fazendo com que, nas próximas tarefas, eles optem mais vezes pelo método algébrico.

Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não se conseguem abstrair do terreno como um todo, o que dificulta a compreensão da totalidade do terreno como a junção de várias partes;	• Os alunos compreendem que não têm uma fórmula para calcular a área do terreno do Sr. António, optando por dividir o terreno em dois mais pequenos (ou um maior, tirando depois uma parte); • O professor deve dar o exemplo das figuras estudadas nas aulas anteriormente, como o caso da divisão dos trapézios;

Momentos de Aula: Trabalho Autónomo.

Tempo: 50 minutos

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Mobilizar conhecimentos para resolver as Questões 1 e 2; • Debater com o seu par, de forma a encontrarem uma estratégia para resolverem a tarefa; • Em caso de dúvida, tentar esclarecer com o professor, para que consiga prosseguir na resolução da tarefa; • Analisar de forma crítica as suas respostas;	• Monitorizar o trabalho dos alunos, garantindo que estão a trabalhar a pares; • Tentar que todos os alunos estejam a conseguir fazer algumas das alíneas, esclarecendo pequenas dúvidas e dando algumas ajudas, para que todos consigam definir as suas estratégias de resolução; • Selecionar as resoluções que lhe pareçam mais importantes para a discussão coletiva.

Momentos de Aula: Discussão Coletiva.

Tempo: 30 minutos

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Analisar de forma crítica os resultados apresentados e comparar com os seus; • Participar construtivamente na discussão quando solicitado pelo professor; • Se achar que a sua resolução deve ser alvo de debate, então deve de expô-la ao professor; • Compreender as estratégias e resoluções que forem apresentadas, podendo assim definir novas metodologias de trabalho; • Caso surjam dúvidas, deve tentar esclarecê-las no momento, pois poderão ser também dúvidas dos colegas.	• Gerir as intervenções dos alunos, tentando abordar tanto as dificuldades, como as melhores estratégias de resolução que os alunos foram seguindo durante o momento de trabalho autónomo; • Garantir que todos os alunos compreendem as resoluções que estão a ser feitas no quadro; • Não validar as respostas dos alunos durante o momento de discussão, para que sejam eles a defender e a explicar as suas resoluções; • Caso os alunos não cheguem a alguma das estratégias que o professor ache importante, este deve de fazer questões, de maneira a que os alunos cheguem lá por si mesmos;

Avaliação

A avaliação será feita através de observação direta:

- Interesse, empenho e trabalho colaborativo, durante os momentos de trabalho autónomo;
- Participação e comunicação matemática (os alunos terão de justificar as suas respostas, sendo necessário que as suas ideias sejam claras para toda a turma, utilizando a linguagem matemática adequada a cada uma das resoluções).

No final da aula, serão recolhidas as resoluções dos alunos, para uma melhor análise das aprendizagens, das estratégias e das dificuldades que os alunos sentiram durante a aula. Será ainda entregue no final da aula o TPC.

A avaliação será reguladora, tendo por base uma avaliação formativa, pois o importante é que todos os alunos consigam atingir os objetivos traçados para a aula.

Aula 2 – 10 de março de 2016

Plano de Aula – 10/03/2016

Tema: Resolução de Problemas – Equações do 1º Grau

Objetivos Específicos

- Compreensão e resolução de problemas;

Metodologia de Trabalho

- Trabalho a Pares

Capacidades Transversais

- Trabalho colaborativo;
- Descoberta;
- Autonomia;
- Autoconfiança;
- Comunicação Matemática;
- Espírito Crítico;
- Gosto pela matemática.
- Raciocínio matemático;
- Estabelecimento de conexões.

Recursos

- Tarefa – “A Álgebra na Geometria I”;
- Tarefa – “O Triângulo”
- Quadro Branco e Marcadores;

Momentos de Aula

- Síntese final da tarefa da aula anterior – 5 min;
- Introdução da tarefa – “O Triângulo” – 5 min;
- Trabalho Autónomo (Q1) – 10 min;
- Discussão Coletiva (Q1) – 10 min;
- Trabalho Autónomo (Q Extra) – 10 min;
- Discussão Coletiva (Q Extra) –5 min.

A Aula

Momento de Aula: Síntese final da tarefa da aula anterior

Tempo: 5 minutos

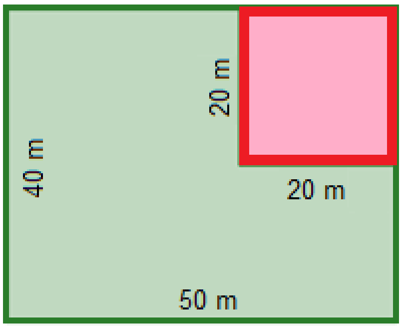
O professor deve preparar o quadro antes do início da aula, de forma a ter já as várias possibilidades de correção da alínea d) da tarefa anterior, de forma a tentar agilizar mais rapidamente a compreensão dos alunos acerca das possíveis resolução da respetiva alínea. Deve aproveitar para também deixar as tarefas recolhidas no final da aula anterior, e que foram posteriormente corrigidas por si em casa.

Após a entrada dos alunos na sala, serão discutidas as resoluções presentes no quadro, de forma a esclarecer qualquer dúvida que ainda subsista.

Tarefa
d. Qual é a área do terreno do Sr. António?

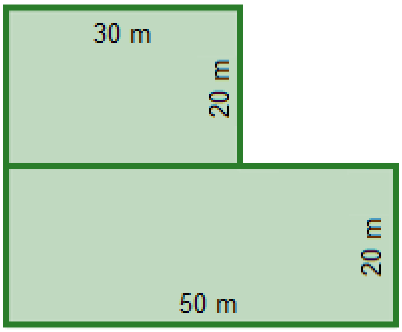
Possíveis resoluções:

a.



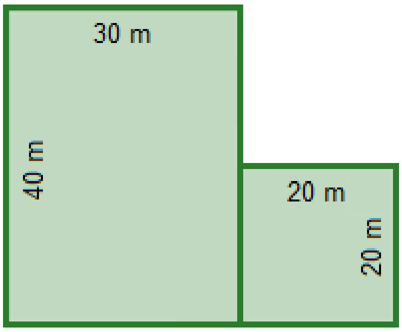
$$A_{verde} = 40 \times 50 = 2000\ m^2$$
$$A_{vermelho} = 20 \times 20 = 400\ m^2$$
$$A_{terreno} = 2000 - 400 = 1600\ m^2$$

b.



$$A_{pequeno} = 30 \times 20 = 600\ m^2$$
$$A_{grande} = 50 \times 20 = 1000\ m^2$$
$$A_{terreno} = 600 + 1000 = 1600\ m^2$$

c.



$A_{pequeno} = 20 \times 20 = 400\ m^2$
$A_{grande} = 40 \times 30 = 1200\ m^2$
$A_{terreno} = 400 + 1200 = 1600\ m^2$

R: O terreno do Sr. António tem $1600\ m^2$ de área.

Momento de Aula: Introdução da tarefa

Tempo: 5 minutos

Após a discussão final da tarefa anterior, será entregue aos alunos a tarefa para que a leiam e tirem as suas dúvidas. Enquanto fazem uma breve leitura da mesma, o professor aproveita para desenhar a figura no quadro. Tenta no final, esclarecer alguma questão que surja nos alunos.

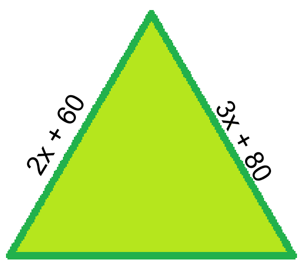
De seguida, será indicado que terão 15 minutos para resolver a questão, iniciando-se posteriormente o trabalho colaborativo.

Momento de Aula: Trabalho Autónomo (Questão 1)

Tempo: 10 minutos

Tarefa

1. Observem o triângulo da figura ao lado. Os comprimentos dos lados estão expressos em milímetros.
   Será possível que o triângulo seja equilátero? Justifica a tua resposta indicando todos os cálculos que efetuares.



O enunciado levanta a questão acerca da classificação do triângulo relativamente aos seus lados, de forma a poderem também relembrar outros conteúdos, de outras áreas da Matemática, sendo ainda necessário que apresentem os seus cálculos como justificação da conclusão a que chegarem. Desta forma, espero que os alunos compreendam as potencialidades dos conteúdos que vinham sendo trabalhados anteriormente, as equações, na resolução de problemas.

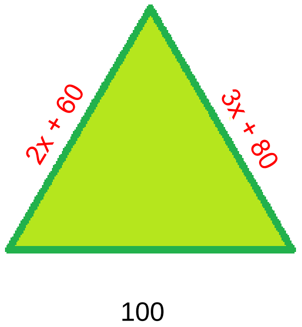
Possíveis resoluções:

1. Operações inversas:
   a) $100 - 60 = 40$
      $40 \div 2 = 20$
      $3 \times 20 + 80 = 140$
      Como tem dois lados diferentes não é um triângulo equilátero.

   b) $100 - 80 = 20$
      $20 \div 3 = 6{,}66(6)$
      $2 \times 6{,}66(6) + 60 = 73{,}33(3)$
      Como tem dois lados diferentes não é um triângulo equilátero.

2. Equações;

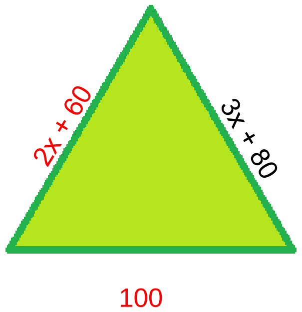
   a)



$$2x + 60 = 3x + 80 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - 3x = 80 - 60 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -20$$

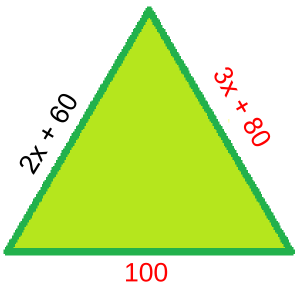
Se x= – 20, temos que:
$2 \times (-20) + 60 = 20$;
$3 \times (-20) + 80 = 20$.
Mas o outro lado mede 100, por isso nunca poderia ser equilátero. Para além disso, não é um triângulo, pois a soma das medidas de dois dos seus lados não é superior à medida do outro lado.

   b)



$$2x + 60 = 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 100 - 60 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 20$$

Se x = 20, temos que:
$2 \times (20) + 60 = 100$;
$3 \times (20) + 80 = 140$.
Assim temos dois lados que medem 100 e o terceiro lado mede 140. Portanto, o triângulo não é equilátero, mas sim isósceles.

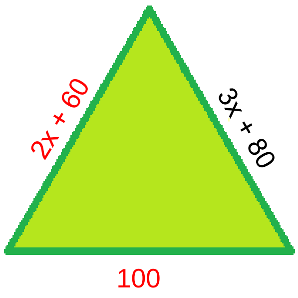
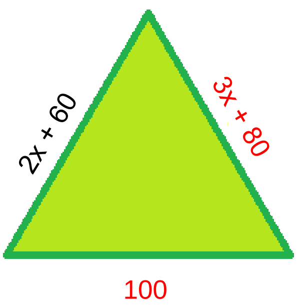
<table>
<tr><td>c)

</td><td>$3x + 80 = 100 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x = 100 - 80 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x = 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 6{,}66(6)$

Se x = 20, temos que:
$2 \times (6{,}66(6)) + 60 = 73{,}33(3);$
$3 \times (6{,}66(6)) + 80 = 100.$
Assim temos dois lados que medem 100 e o terceiro lado mede 73,33(3). Portanto, o triângulo não é equilátero, mas sim isósceles.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Razões que levaram a colocar esta questão</td></tr>
<tr><td colspan="2">Através desta questão os alunos irão trabalhar as equações, sendo que há mais que uma possibilidade de resolução, chegando a resultados de equação diferentes, mas ainda assim, a uma resposta de problema correta. Esse é outro dos fatores que me levaram a colocar esta questão, pois é importante que os alunos compreendam que não há apenas uma resolução correta, pois em alguns casos há várias formas de encontrar a resposta que procuram. Para além disso, a possibilidade de expandir a questão para o caso dos triângulos isósceles, algo que prevejo fazer neste plano de aula, poderá vir a ser um meio que torne a resolução da tarefa mais desafiante para os alunos.</td></tr>
<tr><td>Dificuldades</td><td>Estratégias</td></tr>
<tr><td></td><td>• Compreendem a questão, e resolvê-la através de qualquer uma das formas explícitas acima;</td></tr>
<tr><td>• Os alunos não compreendem a questão.</td><td>• O professor deve tentar traduzi-la, fornecendo pequenas pistas sobre o que procuram responder, e como o poderão fazer.</td></tr>
<tr><td>• Os alunos resolvem a questão através do método apresentado em 2.a), assumindo que o triângulo será assim isósceles.</td><td>• O professor deve aproveitar tal resolução no momento de discussão coletiva, servindo como mote para o lançamento da questão extra.</td></tr>
</table>

Momento de Aula: Trabalho Autónomo (Questão Extra)

Tempo: 10 minutos

Tarefa (Questão Extra)
Então e será que o triângulo pode ser isósceles? Se sim, de quantas maneiras diferentes?
Esta questão é colocada como complemento à anterior, tentando que os alunos percebam as equações e as respetivas resoluções, que tornarão o triângulo isósceles.

Possíveis resoluções: Equações:	
	$2x + 60 = 100 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x = 100 - 60 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 20$ Se x = 20, temos que: $2 \times (20) + 60 = 100;$ $3 \times (20) + 80 = 140.$ Assim temos dois lados que medem 100 e o terceiro lado mede 140. Portanto, o triângulo não é equilátero, mas sim isósceles.
	$3x + 80 = 100 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x = 100 - 80 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x = 20 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 6{,}66(6)$ Se x = 20, temos que: $2 \times (6{,}66(6)) + 60 = 73{,}33(3);$ $3 \times (6{,}66(6)) + 80 = 100.$ Assim temos dois lados que medem 100 e o terceiro lado mede 73,33(3). Portanto, o triângulo não é equilátero, mas sim isósceles.

Razões que levaram a colocar esta questão
Esta questão virá a seguir ao trabalho autónomo dos alunos, pois prevejo que a maioria dos alunos utilizem as equações e que alguns cheguem ao resultado apresentado neste plano anteriormente em 2.a). Será um dos pares que utilizarem essa equação que apresentará, no primeiro momento de discussão coletiva, que irá defender a sua resolução perante os colegas, sendo que, salientarei, caso os alunos não tenham reparado, o facto de que com os lados da figura que encontrarão, não é possível construir um triângulo. Assim, os alunos trabalharão as equações através da resolução de problemas.

Dificuldades	Estratégias
• Os alunos não compreendem o que é pedido pelo professor, podendo salientar que já encontraram uma maneira de o triângulo ser isósceles (caso não tenham igualado os dois lados definidos através de uma expressão numérica.	• Compreendem a questão que lhes é colocada, e encontram as duas maneiras possíveis de tornar o triângulo isósceles. • O professor deve salientar a segunda pergunta que colocou, isto é, questionando se não existirão mais maneiras de o triângulo ser isósceles.

Momentos de Aula: Trabalho Autónomo.

Tempo: 10 + 10 minutos

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Mobilizar conhecimentos para resolver a Questão 1 e para a Questão Extra; • Debater com o seu par, de forma a encontrarem uma estratégia para resolverem a tarefa; • Em caso de dúvida, tentar esclarecer com o professor, para que consiga prosseguir na resolução da tarefa; • Analisar de forma crítica as suas respostas;	• Monitorizar o trabalho dos alunos, garantindo que estão a trabalhar a pares; • Tentar que todos os alunos estejam a conseguir fazer algumas das alíneas, para que todos consigam definir as suas estratégias de resolução; • Selecionar as resoluções que lhe pareçam mais importantes para a discussão coletiva (no caso da Questão 1, procurar um par de alunos que tenha chegado a um caso de impossibilidade de construção de um triângulo).

Momentos de Aula: Discussão Coletiva.

Tempo: 15 + 5 minutos

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Analisar de forma crítica os resultados apresentados e comparar com os seus; • Participar construtivamente na discussão quando solicitado pelo professor; • Se achar que a sua resolução deve ser alvo de debate, então deve de expô-la ao professor; • Compreender as estratégias e resoluções que forem apresentadas, podendo assim definir novas metodologias de trabalho; • Caso surjam dúvidas, deve tentar esclarecê-las no momento, pois poderão ser também dúvidas dos colegas.	• Gerir as intervenções dos alunos, tentando abordar tanto as dificuldades, como as melhores estratégias de resolução que os alunos foram seguindo durante o momento de trabalho autónomo; • Garantir que todos os alunos compreendem as resoluções que estão a ser feitas no quadro; • Não validar as respostas dos alunos durante o momento de discussão, para que sejam eles a defender e a explicar as suas resoluções; • Caso os alunos não cheguem a alguma das estratégias que o professor ache importante, este deve de fazer questões, de maneira a que os alunos cheguem lá por si mesmos; • Colocar questão Extra no final do primeiro momento de discussão.

Avaliação

A avaliação será feita através de observação direta:

- Interesse, empenho e trabalho colaborativo, durante os momentos de trabalho autónomo;
- Participação e comunicação matemática (os alunos terão de justificar as suas respostas, sendo necessário que as suas ideias sejam claras para toda a turma, utilizando a linguagem matemática adequada a cada uma das resoluções).

No final da aula, serão recolhidas as resoluções dos alunos, para uma melhor análise das aprendizagens, das estratégias e das dificuldades que os alunos sentiram durante a aula.

A avaliação será reguladora, tendo por base uma avaliação formativa, pois o importante é que todos os alunos consigam atingir os objetivos traçados para a aula.

Aula 3 – 14 de março de 2016

Plano de Aula – 14/03/2016

Tema: Resolução de Problemas – Equações do 1º Grau

Objetivos Específicos

- Resolução de problemas;
- Compreensão e tradução algébrica de problemas;

Metodologia de Trabalho

- Trabalho a Pares

Capacidades Transversais

- Trabalho colaborativo;
- Descoberta;
- Autonomia;
- Autoconfiança;
- Comunicação Matemática;
- Espírito Crítico;
- Gosto pela matemática.
- Raciocínio matemático;
- Estabelecimento de conexões.

Recursos

- Tarefa – "A Álgebra na Geometria II";
- Quadro Branco e Marcadores;

Momentos de Aula

- Introdução da aula – 10 min;
- Trabalho Autónomo – 50 min;
- Discussão Coletiva – 30 min;

A Aula

Momento de Aula: Introdução da Aula

Tempo: 10 minutos

Para esta aula, ao invés do que é habitual, não é necessário que o professor prepare o quadro antes do início da aula, mas ainda assim, deve estar presente antes do toque, para que os alunos notem o interesse e o desejo do professor presentes na lecionação da aula.

Após a entrada dos alunos na sala, ser-lhes-á entregue a tarefa para que a leiam e tirem as suas dúvidas. De seguida, será indicado que terão 50 minutos para resolver a tarefa, iniciando-se de seguida o trabalho colaborativo.

Momento de Aula: Trabalho Autónomo (Questão 1)

Tempo: 50 minutos

<table>
<tr><th>Tarefa</th></tr>
<tr><td>1. Resolve os seguintes problemas e, num pequeno texto, explica a tua resolução de cada um.

a. Um quadrado tem 36cm de perímetro. Qual é a sua área?</td></tr>
<tr><td>Em primeiro lugar, é importante a noção do que é pedido ao longo de todas as alíneas da tarefa, ou seja, que os alunos devem expressar, através de um pequeno texto, as suas resoluções e os seus raciocínios.
Neste primeiro caso, apenas sabem que há quadrado tem 36 centímetros de perímetro, e é-lhes pedido que descubram qual a sua área, sendo que para tal terão de descobrir a medida do lado da figura, e de seguida utilizar a fórmula da área do quadrado. Não é definida nenhuma estratégia que devam seguir, ficando por isso ao encargo dos alunos a escolha do caminho que irão realizar.</td></tr>
<tr><td>Possíveis resoluções:
a) Operações Inversas:
Como o quadrado tem 4 lados, dividimos o seu perímetro por 4:
$$36 \div 4 = 9$$
Como a área do quadrado se calcula multiplicando o lado por si próprio:
$$9 \times 9 = 81$$
Logo o quadrado tem 81 centímetros quadrados de área.

b) Equações:
Tomemos x como a medida do lado do quadrado.
$$4x = 36 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 9$$
$$A = 9 \times 9 = 81$$
Logo o quadrado tem 81 centímetros quadrados de área.</td></tr>
</table>

Razões que levaram a colocar esta questão	
Através desta questão os alunos poderão trabalhar as equações, através de uma boa tradução algébrica do problema, ou utilizar as operações inversas. Ainda que se decidam por este segundo caminho, é importante salientar que os passos que realizam na respetiva resolução são idênticos aos que teriam de dar se utilizassem os seus conhecimentos acerca das equações. Para além disso, parece-me essencial iniciar o trabalho com uma questão mais simples, esperando que todos os alunos a consigam fazer, de forma a tentar cativar os alunos para o trabalho em torno das alíneas seguintes, que serão mais desafiantes.	
Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la através de qualquer uma das formas explícitas acima; • O professor deve tentar traduzi-la, fornecendo pequenas pistas sobre o que procuram responder, e como o poderão fazer.

Tarefa
b. O perímetro de um quadrado com 12 cm de lado é igual ao dobro do perímetro de um triângulo isósceles de base 10 cm. Qual é o comprimento dos outros dois lados do triângulo?
Nesta segunda alínea, os alunos terão de calcular o perímetro de um quadrado com 12 centímetros de lado, sabendo que é igual ao dobro do perímetro de um triângulo isósceles, constituído por uma base com 10 centímetros e dois lados iguais. É esperado que utilizem novamente as operações inversas ou as equações, sendo que é muito importante a explicação dos seus raciocínios.
Possíveis resoluções: a) Operações Inversas: O quadrado tem 4 lados, logo para saber o seu perímetro: $12 \times 4 = 48$ Como o triângulo tem metade da área do quadrado: $48 \div 2 = 24$ Como o triângulo tem 10 centímetro de base: $24 - 10 = 14$ Como se trata de um triângulo isósceles: $14 \div 2 = 7$ Logo, o comprimento dos outros dois lados do triângulo é de 7 centímetros.

b) Equações:

Tomemos x como a medida de um dos lados isósceles do triângulo.

$$4 \times 12 = 2 \times (10 + 2x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 48 = 20 + 4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 28 = 4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7 = x$$

Logo, o comprimento dos outros dois lados do triângulo é de 7 centímetros.

Razões que levaram a colocar esta questão

Esta segunda alínea, apesar de ainda não ser de um grau de dificuldade muito elevado, pode demonstrar-se importante relativamente à tradução algébrica de problemas. A existência de muita informação no enunciado do problema, é, por vezes, um fator que cria algumas dificuldades aos alunos. Através desta questão, espero que os alunos trabalhem essa sua capacidade de traduzir problemas, aproveitando de seguida para testar os seus conhecimentos na resolução de equações.

Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la através de qualquer uma das formas explícitas acima; • O professor deve tentar traduzi-la, fornecendo pequenas pistas sobre o que procuram responder, e como o poderão fazer.
• Os alunos demonstram dificuldades na tradução do problema.	• O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”
• Os alunos não conseguem resolver a equação.	• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas.

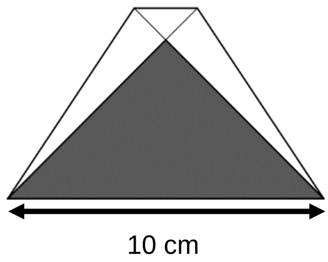
Tarefa

c. Um retângulo tem *h* cm de altura. O comprimento da sua base é igual à soma do dobro da sua altura com 20 metros. Sabendo que o perímetro do retângulo é de 100 m, qual é o comprimento da base?

Nesta alínea é pedido aos alunos que voltem a explicar os seus passos na resolução do problema que consiste na descoberta do comprimento da base de um retângulo, do qual apenas se conhece o perímetro e a relação existente entre a base e a altura do retângulo, sendo necessário ter alguma

atenção à questão que é levantada, pois poderá não ser a solução da equação trabalhada.	
Possíveis resoluções: a) Operações Inversas: Como o perímetro é de 100 metros e o comprimento da base é igual à soma do dobro da altura com 20: $100 - 40 = 60$ De resto sobram então 6 medidas iguais (duas de cada uma das bases e uma de cada uma das alturas): $60 \div 6 = 10$ Como o comprimento da base é igual à soma do dobro da altura com 20: $2 \times 10 + 20 = 40$ Logo, o comprimento da base do retângulo é de 40 metros. b) Equações: Tomemos h como a altura do retângulo $h + h + (2h + 20) + (2h + 20) = 100 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6h + 40 = 100 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6h = 60 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow h = 10$ Como o comprimento da base é dado pela expressão: $2h + 20$ e temos que $h = 10$: $2 \times 10 + 20 = 40$ Logo, o comprimento da base do retângulo é de 40 metros. c) Tentativa e erro.	
Razões que levaram a colocar esta questão	
Esta questão foi colocada prevendo uma dificuldade dos alunos que é a compreensão do problema e consequentemente a tradução do mesmo. Através desta alínea, penso que seja possível mostrar aos alunos a importância que o esboço de um desenho pode tomar na resolução de um problema. Para além disto, como a minha pesquisa gira em torno da resolução de tarefas que envolvam equações do 1º grau, penso que esta será uma questão para a qual a grande maioria dos alunos tente utilizar os seus conhecimentos acerca desses conteúdos.	
Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão. • Ainda assim, os alunos demonstram dificuldades na tradução do problema.	• Compreender a questão, e resolvê-la através de qualquer uma das formas explícitas acima; • O professor deve salientar a importância que um esboço pode ter na tradução de um problema, tornando-o na maioria das vezes mais claro e simples. • O professor deve salientar a importância que deve ser dada

	ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”
• Os alunos não conseguem resolver a equação.	• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas.

<table>
<tr><th colspan="2">Tarefa</th></tr>
<tr><td>d. As diagonais do trapézio isósceles representado na figura aqui ao lado intersectam-se a cinco sextos da altura do trapézio. O triângulo a sombreado tem 25 cm² de área. Qual é a comprimento da altura do trapézio?</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nesta alínea é apresentada aos alunos a figura de um trapézio isósceles que tem como medida da base maior 10 centímetros. Inscrito nele, através das suas duas diagonais, aparece a sombreado um triângulo que tem 25 centímetros quadrados de área, sendo que lhes é pedido que encontrem a altura do trapézio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Possíveis resoluções:
a) Operações Inversas:
Como sabemos que a área do triângulo é dada por metade do produto entre a base e a altura:
$$25 \times 2 = 50$$
$$50 \div 10 = 5$$
De seguida, sabemos que as diagonais se intersetam a cinco sextos da altura do trapézio, logo podemos fazer uma regra de 3 simples:
$$Altura\ do\ trapézio = \frac{5 \times 1}{\frac{5}{6}} = 6$$
Assim, o trapézio tem 6 centímetro de altura.

b) Equações:
Tomemos x como a altura do triângulo:
$$25 = \frac{10 \times x}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 50 = 10 \times x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5 = x$$</td></tr>
</table>

De seguida, sabemos que as diagonais se intersetam a cinco sextos da altura do trapézio, logo podemos fazer uma regra de 3 simples:

$$Altura\ do\ trapézio = \frac{5 \times 1}{\frac{5}{6}} = 6$$

Assim, o trapézio tem 6 centímetro de altura.

c) Tentativa e erro.

Razões que levaram a colocar esta questão

Esta apresenta-se como a alínea mais complicada, mas por isso mesmo também mais interessante da tarefa. Aqui são trabalhados vários aspetos na compreensão de enunciados de problemas, como são os casos do que representa a área de um triângulo, e de seguida de um trapézio, bem como os conhecimentos da forma da área de um triângulo. Ao longo desta tarefa volta a ser expectável que os alunos utilizem as equações para encontrar a altura do triângulo, e que de seguida façam uso da regra de 3 simples, aprendida já anteriormente através da proporcionalidade inversa. Procura-se ainda trabalhar a tradução dos problemas, pois é importante que se torne claro para os alunos que nem toda a informação presente num enunciado é essencial para se encontrar a sua resposta.

Dificuldades	Estratégias
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la através de qualquer uma das formas explícitas acima; • O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”;
• Os alunos não conseguem resolver a equação.	• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;
• Apesar de terem chegado à solução da equação, os alunos não conseguem prosseguir ou explicar os processos da descoberta pela altura do trapézio.	• O professor deve relembrar o enunciado e voltar a questionar o que significa o facto de a altura do triângulo estar a cinco sextos da altura do trapézio.

Momentos de Aula: Trabalho Autónomo.

Tempo: 50 minutos

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Mobilizar conhecimentos para resolver a Questão 1; • Debater com o seu par, de forma a encontrarem uma estratégia para resolverem a tarefa; • Em caso de dúvida, tentar esclarecer com o professor, para que consiga prosseguir na resolução da tarefa; • Analisar de forma crítica as suas respostas;	• Monitorizar o trabalho dos alunos, garantindo que estão a trabalhar a pares; • Tentar que todos os alunos estejam a conseguir fazer algumas das alíneas, para que todos consigam definir as suas estratégias de resolução; • Selecionar as resoluções que lhe pareçam mais importantes para a discussão coletiva.

Momentos de Aula: Discussão Coletiva.

Tempo: 30 minutos

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Analisar de forma crítica os resultados apresentados e comparar com os seus; • Participar construtivamente na discussão quando solicitado pelo professor; • Se achar que a sua resolução deve ser alvo de debate, então deve de expô-la ao professor; • Compreender as estratégias e resoluções que forem apresentadas, podendo assim definir novas metodologias de trabalho; • Caso surjam dúvidas, deve tentar esclarecê-las no momento, pois poderão ser também dúvidas dos colegas.	• Gerir as intervenções dos alunos, tentando abordar tanto as dificuldades, como as melhores estratégias de resolução que os alunos foram seguindo durante o momento de trabalho autónomo; • Garantir que todos os alunos compreendem as resoluções que estão a ser feitas no quadro; • Não validar as respostas dos alunos durante o momento de discussão, para que sejam eles a defender e a explicar as suas resoluções; • Caso os alunos não cheguem a alguma das estratégias que o professor ache importante, este deve de fazer questões, de maneira a que os alunos cheguem lá por si mesmos;

Avaliação

A avaliação será feita através de observação direta:

- Interesse, empenho e trabalho colaborativo, durante os momentos de trabalho autónomo;
- Participação e comunicação matemática (os alunos terão de justificar as suas respostas, sendo necessário que as suas ideias sejam claras para toda a turma, utilizando a linguagem matemática adequada a cada uma das resoluções).

No final da aula, serão recolhidas as resoluções da tarefa e do TPC que havia sido pedido no final da primeira aula, para uma melhor análise das aprendizagens, das estratégias e das dificuldades que os alunos sentiram durante a aula e na realização do trabalho de casa.

A avaliação será reguladora, tendo por base uma avaliação formativa, pois o importante é que todos os alunos consigam atingir os objetivos traçados para a aula.

Aula 4 – 4 de abril de 2016

Plano de Aula – 04/04/2016

Tema: Resolução de Problemas – Equações do 1º Grau

Objetivos Específicos

- Resolução de problemas;
- Compreensão e tradução algébrica de problemas;

Metodologia de Trabalho

- Trabalho a Pares

Capacidades Transversais

- Trabalho colaborativo;
- Descoberta;
- Autonomia;
- Autoconfiança;
- Comunicação Matemática;
- Espírito Crítico;
- Gosto pela matemática.
- Raciocínio matemático;
- Estabelecimento de conexões.

Recursos

- Tarefa – "Será que vais conseguir descobrir?";
- Papéis com cálculos individuais;
- Quadro Branco e Marcadores;

Momentos de Aula

- Introdução da aula – 10 min;
- Trabalho Autónomo (Q1) – 20 min;
- Discussão Coletiva (Q1) e Síntese – 10 min;
- Trabalho Autónomo (Q2) – 30 min;
- Discussão Coletiva (Q2) – 20 min.

A Aula

Momento de Aula: Introdução da Aula

Tempo: 10 minutos

O professor deve chegar à sala antes do início da aula, colocando em cada uma das mesas os cálculos que cada aluno deve realizar para preencher na questão 1, sendo importante que as folhas estejam viradas para baixo, de forma a que o seu parceiro (que irá de ter de descobrir o número que o seu colega escolher) não veja os cálculos.

Após a entrada dos alunos na sala, e antes de lhes ser entregue a tarefa para que a leiam e tirem as suas dúvidas, é pedido aos alunos que escolham um número, e que com ele realizem os cálculos que lhes são pedidos nas suas folhas. De seguida, é explicado aos pares que devem introduzir, em cada uma das alíneas, os valores a que os seus colegas chegaram.

Tarefa
1. Quais serão os números? 1.1. Escolhe, ao acaso, três números, *a*, *b* e *c*, para cada uma das seguintes alíneas, e completa as afirmações de forma a torná-las verdadeiras. i. Pensei no número *a*, calculei o seu quíntuplo, e de seguida adicionei-lhe quinze unidades, obtive ____________. ii. Pensei no número *b*, dupliquei a sua soma com vinte e três, e subtraí-lhe vinte unidades, obtendo ____________. iii. Pensei no número *c*, calculei a terça parte do produto entre *c* e nove e, de seguida, adicionei-lhe trinta e nove unidades, e obtive ____________.
Esta primeira alínea é realizada durante o momento de introdução da tarefa. É dada a cada aluno uma folha onde se pede que escolham um número e que, com ele, procedam a alguns cálculos. De seguida, os alunos preencherão, com os resultados que obtiverem, os espaços dos pontos i), ii) e iii).
Razões que levaram a colocar esta questão
Esta questão foi colocada, pois o facto de ser o início do 3º período letivo poderá fazer com que os alunos se apresentem demasiado extasiados na primeira aula do período. Desta forma, espero que os alunos se sintam mais interessados na resolução dos problemas, criando quase que uma competição entre eles, tentando descobrir o número que o colega pensou.

Por fim, será indicado que terão 20 minutos para resolver a questão 1, iniciando-se de seguida o trabalho colaborativo.

Momento de Aula: Trabalho Autónomo (Questão 1)

Tempo: 20 minutos

Tarefa
1.2. Descobre o número que o teu colega imaginou.
Nesta questão, os alunos terão de realizar vários cálculos para chegar ao número em que o seu colega pensou, seja através de operações inversas, de equações ou de tentativas.
Possíveis resoluções: a) Operações Inversas: i. Primeiro, ao número "A" a que o pelo colega chegou, subtrai 15. $A-15$ Depois divide esse resultado por 5. $\frac{A-15}{5}$ E o resultado a que chegar, é o valor em que o seu colega pensou. ii. Primeiro, ao número "B" a que o pelo colega chegou, soma 20. $B+20$ Depois divide esse resultado por 2. $\frac{B+20}{2}$ De seguida, a este resultado terá de subtrair 23. $\frac{B+20}{2}-23$ E o resultado a que chegar, é o valor em que o seu colega pensou. iii. Primeiro, ao número "C" a que o pelo colega chegou, subtrai 39. $C-39$ Depois multiplica esse resultado por 3. $(C-39)\times 3$ De seguida, divide este resultado por 9. $((C-39)\times 3)\div 9$ E o resultado a que chegar, é o valor em que o seu colega pensou.

b) Equações:

i.

$$5a + 15 = A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5a = A - 15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{A - 15}{5}$$

ii.

$$2 \times (b + 23) - 20 = B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2b + 46 - 20 = B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2b + 26 = B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2b = B - 26 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{B - 26}{2}$$
$$ou$$
$$2 \times (b + 23) - 20 = B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 \times (b + 23) = B + 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b + 23 = \frac{B + 20}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{B + 20}{2} - 23$$

iii.

$$9c \div 3 + 39 = C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9c \div 3 = C - 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3c = C - 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{C - 39}{3} \Leftrightarrow$$
$$ou$$
$$9c \div 3 + 39 = C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9c \div 3 = C - 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9c = (C - 39) \times 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c = ((C - 39) \times 3) \div 9$$

c) Tentativa e erro

Razões que levaram a colocar esta questão
Através desta questão, espero que todos os alunos se possam sentir envolvidos na resolução da tarefa, pois todos tentam resolver a primeira alínea, os rapazes tentarão descobrir na segunda alínea o número em que a aluna de cada par pensou, acontecendo o contrário no terceiro caso. Desta forma, todos os alunos terão de trabalhar as suas capacidades, ao invés de estarem "à boleia" dos seus colegas. O interesse pela descoberta do número do parceiro, e a possível competição entre ambos pode ser um fator muito positivo, mantendo-os mais focados no trabalho desenvolvido.

Dificuldades	Estratégias
• Os alunos não compreendem a questão. • Os alunos não conseguem resolver a equação.	• Compreender a questão, e resolvê-la através de qualquer uma das formas explícitas acima; • O professor deve auxiliar os alunos no trabalho com as equações, levando-os a sentir a necessidade de trabalhá-las de forma a descobrir o número em que o colega pensou. Para isso, pode iniciar utilizando questões, como – "Em que número é que o teu colega pensou? O que diz o enunciado."; • O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;

Tarefa
1.3. Discute com o teu colega como chegaste à tua resposta.
Nesta questão, os alunos terão de defender as suas estratégias de resolução perante o seu par, de forma a mostrar como chegaram aos valores que eles haviam pensado.
Razões que levaram a colocar esta questão
Através desta questão, os alunos poderão debater as diferentes estratégias que utilizaram, de forma a poderem definir qual seria a melhor. O facto de serem dois alunos diferentes, fará com que possam esclarecer algumas dúvidas que ainda subsistam e interiorizar novas aprendizagens. A comunicação matemática é também um ponto que será muito trabalhado ao longo desta alínea.

Momento de Aula: Trabalho Autónomo (Questão 2)

Tempo: 30 minutos

Tarefa
2. Escrevam uma equação que vos permita resolver cada um dos seguintes problemas, e indiquem a respetiva resposta:

<table>
<tr><td colspan="2">2.1. A soma do sêxtuplo de um número com dois é igual ao próprio número. Qual é o número?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nesta questão, os alunos são levados a traduzir algebricamente os problemas, chegando a uma equação da qual precisam da sua solução, para poderem encontrar a resposta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Possíveis resoluções:
a) Equações:
Definindo uma variável “x” como sendo o número de que fala o enunciado, temos:
$$6x + 2 = x \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow 6x - x = -2 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow 5x = -2 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow x = -0{,}4$$
Verificação:
$$6 \times (-0{,}4) + 2 = -2{,}4 + 2 = -0{,}4$$
O número de que fala o enunciado é o – 0,4.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Razões que levaram a colocar esta questão</td></tr>
<tr><td colspan="2">Através desta alínea os alunos poderão trabalhar a tradução algébrica de problemas, e a resolução de equações. Neste caso específico, os alunos chegarão a uma solução negativa e decimas (ou fracionária), o que se pode demonstrar muito relevante para esclarecer algumas dúvidas, principalmente relativamente à importância da utilização da verificação dos resultados.</td></tr>
<tr><td>Dificuldades</td><td>Estratégias</td></tr>
<tr><td>• Os alunos não compreendem a questão.

• Os alunos não conseguem resolver a equação.</td><td>• Compreender a questão, e resolvê-la;
• O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”;
• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;</td></tr>
</table>

• Apesar de terem chegado à solução da equação, os alunos não conseguem compreender o significado do valor que descobriram.	• O professor deve relembrar o enunciado e voltar a questionar o que significa a incógnita. Posteriormente, deve salientar a importância da utilização da verificação de resultados.

Tarefa	
2.2. O triplo da diferença entre um número e quatro é igual ao dobro da soma desse número com três. Qual é o número?	
Nesta alínea, tal como na anterior, os alunos terão de descobrir o número que respeita todas as informações do enunciado. Para isso, terão de realizar uma boa tradução do problema, dando uma especial atenção às prioridades que devem ser dadas relativamente a cada uma das operações.	
Possíveis resoluções: a) Equações: Definindo uma variável “a” como sendo o número de que fala o enunciado, temos: $3 \times (a-4) = 2 \times (a+3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3a - 12 = 2a + 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3a - 2a = 6 + 12 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = 18$ Verificação: $3 \times (18-4) = 3 \times 14 = 42$ $2 \times (18+3) = 2 \times 21 = 42$ O número de que fala o enunciado é o 18.	
Razões que levaram a colocar esta questão	
O interesse desta questão está na tradução algébrica do problema feita pelos alunos, de onde se poderá observar o seu nível de compreensão dos enunciados. A atenção que deverão ter relativamente às prioridades das operações é de extrema importância, pois a falta de um parêntesis, ou o cálculo por uma ordem diferente, levá-los-á a um resultado errado.	
Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la; • O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”. De seguida, deve salientar a importância relativamente às prioridades,

• Os alunos não conseguem resolver a equação.	perguntando – "Que operação devemos realizar primeiro?"; • O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;

Tarefa
2.3. A soma de dois números inteiros consecutivos é 2142. Quais são os números?
Nesta alínea, os alunos devem desenvolver um trabalho significativo na definição da incógnita, e consequentemente na tradução algébrica do problema. Ao encontrarem uma solução decimal, os alunos devem concluir que o problema não tem solução.
Possíveis resoluções: a) Equações: Definindo uma variável "n" como sendo o primeiro dos números inteiros consecutivos de que fala o enunciado, temos: $n + n + 1 = 2142 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2n + 1 = 2142 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2n = 2141 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n = 1070{,}5$ Verificação: $1070{,}5 + 1070{,}5 + 1 = 2142$ A solução da equação é 1070,5, mas esse número não é inteiro, logo o problema não tem solução.
Razões que levaram a colocar esta questão
O interesse desta questão está em trabalhar o caso de impossibilidade. Os alunos chegarão a um valor decimal, sendo que no enunciado fala de dois números inteiros consecutivos. Outro ponto que é importante no trabalho desenvolvido nesta alínea prende-se com o significado que é dado à incógnita, e com a compreensão da diferença entre a solução da equação e a resposta final.

Dificuldades	Estratégias
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la; • O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões

• Os alunos não conseguem resolver a equação.	como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”; • O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;
• Apesar de terem chegado à solução da equação, os alunos não conseguem compreender o significado do valor que descobriram.	• O professor deve relembrar o enunciado e voltar a questionar o que significa a incógnita. O professor deve também clarificar a diferença existente entre a solução da equação e a resposta, esclarecendo algumas questões que possam surgir entre uma equação impossível e um problema que não tem solução.

Tarefa
2.4. A soma de três números pares consecutivos é 246. Quais são os números?
Nesta alínea, os alunos terão de voltar a dar uma grande atenção ao significado que irão atribuir à incógnita. De seguida, os alunos têm de resolver a equação a que chegarem, tendo o cuidado no final com a resposta, pois deve ser o par que encontrarem com a sua equação e os dois seguintes.
Possíveis resoluções: a) Equações: Definindo uma variável “n” como sendo o enésimo par (sendo este o primeiro deles) de que fala o enunciado, temos: $2n + 2 \times (n+1) + 2 \times (n+2) = 246 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 246 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6n + 6 = 246 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 6n = 240 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n = 40$ Verificação: $2 \times 40 + 2 \times (40+1) + 2 \times (40+2) = 80 + 82 + 84 = 246$ ou Definindo uma variável “n” como sendo o primeiro dos números pares consecutivos de que fala o enunciado, temos: $n + n + 2 + n + 4 = 246 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n + 6 = 246 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3n = 240 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n = 80$ Verificação: $80 + 82 + 84 = 246$ Os números são o 80, o 82 e o 84.	
Razões que levaram a colocar esta questão	
Com esta alínea os alunos poderão trabalhar a definição dos significados da incógnita, bem como a compreensão da resposta que deve ser dada. Devem ter o cuidado com os valores a que chegam, podendo facilmente fazer uma verificação dos resultados obtidos. O facto de haver mais que uma forma de resolução, pode também vir a tornar-se importante no momento de discussão coletiva, podendo notar-se que significados de incógnitas diferentes levam a soluções de equações diferentes, mas ainda assim deverão chegar a respostas de problema iguais	
Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la; • O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”;
• Os alunos não conseguem resolver a equação.	• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;
• Apesar de terem chegado à solução da equação, os alunos não conseguem compreender o significado do valor que descobriram, deixando a resposta ao problema em branco.	• O professor deve relembrar o enunciado e voltar a questionar o que significa a incógnita. O professor deve também clarificar a diferença existente entre a solução da equação e a resposta.

Momentos de Aula: Trabalho Autónomo.

Tempo: 20 + 30 minutos

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Mobilizar conhecimentos para resolver a Questão 1 e 2; • Debater com o seu par, de forma a encontrarem uma estratégia para resolverem a tarefa; • Em caso de dúvida, tentar esclarecer com o professor, para que consiga prosseguir na resolução da tarefa; • Analisar de forma crítica as suas respostas;	• Monitorizar o trabalho dos alunos, garantindo que estão a trabalhar a pares; • Tentar que todos os alunos estejam a conseguir fazer algumas das alíneas, para que todos consigam definir as suas estratégias de resolução; • Selecionar as resoluções que lhe pareçam mais importantes para a discussão coletiva.

Momentos de Aula: Discussão Coletiva.

Tempo: 10 + 20 minutos

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Analisar de forma crítica os resultados apresentados e comparar com os seus; • Participar construtivamente na discussão quando solicitado pelo professor; • Se achar que a sua resolução deve ser alvo de debate, então deve de expô-la ao professor; • Compreender as estratégias e resoluções que forem apresentadas, podendo assim definir novas metodologias de trabalho; • Caso surjam dúvidas, deve tentar esclarecê-las no momento, pois poderão ser também dúvidas dos colegas.	• Gerir as intervenções dos alunos, tentando abordar tanto as dificuldades, como as melhores estratégias de resolução que os alunos foram seguindo durante o momento de trabalho autónomo; • Garantir que todos os alunos compreendem as resoluções que estão a ser feitas no quadro; • Não validar as respostas dos alunos durante o momento de discussão, para que sejam eles a defender e a explicar as suas resoluções; • Caso os alunos não cheguem a alguma das estratégias que o professor ache importante, este deve de fazer questões, de maneira a que os alunos cheguem lá por si mesmos.

Avaliação

A avaliação será feita através de observação direta:

- Interesse, empenho e trabalho colaborativo, durante os momentos de trabalho autónomo;
- Participação e comunicação matemática (os alunos terão de justificar as suas respostas, sendo necessário que as suas ideias sejam claras para toda a turma, utilizando a linguagem matemática adequada a cada uma das resoluções).

No final da aula, serão recolhidas as resoluções dos alunos, para uma melhor análise das aprendizagens, das estratégias e das dificuldades que os alunos sentiram durante a aula.

A avaliação será reguladora, tendo por base uma avaliação formativa, pois o importante é que todos os alunos consigam atingir os objetivos traçados para a aula.

Aula 5 – 6 de abril de 2016

Plano de Aula – 06/04/2016

Tema: Resolução de Problemas – Equações do 1º Grau

Objetivos Específicos

- Resolução de problemas;
- Compreensão e tradução algébrica de problemas;

Metodologia de Trabalho

- Trabalho a Pares

Capacidades Transversais

- Trabalho colaborativo;
- Descoberta;
- Autonomia;
- Autoconfiança;
- Comunicação Matemática;
- Espírito Crítico;
- Gosto pela matemática.
- Raciocínio matemático;
- Estabelecimento de conexões.

Recursos

- Tarefa – "Será que vais conseguir descobrir?";
- Tarefa – "As Idades";
- Quadro Branco e Marcadores.

Momentos de Aula

- Trabalho Autónomo (Será que vais conseguir descobrir – Q2) – 30 min;
- Discussão Coletiva (Será que vais conseguir descobrir – Q2) – 20 min;
- Introdução da tarefa – "As Idades" – 5 min;
- Trabalho Autónomo (Q1 e Q2) – 35 min;

A Aula

Momento de Aula: Trabalho Autónomo (Será que vais conseguir descobrir – Questão 2)

Tempo: 30 minutos

<table>
<tr><th colspan="2">Tarefa</th></tr>
<tr><td colspan="2">2. Escrevam uma equação que vos permita resolver cada um dos seguintes problemas, e indiquem a respetiva resposta:

2.1. A soma do sêxtuplo de um número com dois é igual ao próprio número. Qual é o número?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nesta questão, os alunos são levados a traduzir algebricamente os problemas, chegando a uma equação da qual precisam da sua solução, para poderem encontrar a resposta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Possíveis resoluções:
a) Equações:
Definindo uma variável “x” como sendo o número de que fala o enunciado, temos:
$$6x + 2 = x \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow 6x - x = -2 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow 5x = -2 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow x = -0{,}4$$
Verificação:
$$6 \times (-0{,}4) + 2 = -2{,}4 + 2 = -0{,}4$$
O número de que fala o enunciado é o – 0,4.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Razões que levaram a colocar esta questão</th></tr>
<tr><td colspan="2">Através desta alínea os alunos poderão trabalhar a tradução algébrica de problemas, e a resolução de equações. Neste caso específico, os alunos chegarão a uma solução negativa e decimas (ou fracionária), o que se pode demonstrar muito relevante para esclarecer algumas dúvidas, principalmente relativamente à importância da utilização da verificação dos resultados.</td></tr>
<tr><th>Dificuldades</th><th>Estratégias</th></tr>
<tr><td>• Os alunos não compreendem a questão.</td><td>• Compreender a questão, e resolvê-la;
• O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”;</td></tr>
</table>

• Os alunos não conseguem resolver a equação. • Apesar de terem chegado à solução da equação, os alunos não conseguem compreender o significado do valor que descobriram.	• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação; • O professor deve relembrar o enunciado e voltar a questionar o que significa a incógnita. Posteriormente, deve salientar a importância da utilização da verificação de resultados.

Tarefa	
2.2. O triplo da diferença entre um número e quatro é igual ao dobro da soma desse número com três. Qual é o número?	
Nesta alínea, tal como na anterior, os alunos terão de descobrir o número que respeita todas as informações do enunciado. Para isso, terão de realizar uma boa tradução do problema, dando uma especial atenção às prioridades que devem ser dadas relativamente a cada uma das operações.	
Possíveis resoluções: a) Equações: Definindo uma variável "a" como sendo o número de que fala o enunciado, temos: $3 \times (a - 4) = 2 \times (a + 3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3a - 12 = 2a + 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3a - 2a = 6 + 12 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = 18$ Verificação: $3 \times (18 - 4) = 3 \times 14 = 42$ $2 \times (18 + 3) = 2 \times 21 = 42$ O número de que fala o enunciado é o 18.	
Razões que levaram a colocar esta questão	
O interesse desta questão está na tradução algébrica do problema feita pelos alunos, de onde se poderá observar o seu nível de compreensão dos enunciados. A atenção que deverão ter relativamente às prioridades das operações é de extrema importância, pois a falta de um parêntesis, ou o cálculo por uma ordem diferente, levá-los-á a um resultado errado.	
Dificuldades	**Estratégias**
	• Compreender a questão, e resolvê-la;

• Os alunos não compreendem a questão.	• O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”. De seguida, deve salientar a importância relativamente às prioridades, perguntando – “Que operação devemos realizar primeiro?”;
• Os alunos não conseguem resolver a equação.	• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;

Tarefa
2.3. A soma de dois números inteiros consecutivos é 2142. Quais são os números?
Nesta alínea, os alunos devem desenvolver um trabalho significativo na definição da incógnita, e consequentemente na tradução algébrica do problema. Ao encontrarem uma solução decimal, os alunos devem concluir que o problema não tem solução.
Possíveis resoluções: a) Equações: Definindo uma variável “n” como sendo o primeiro dos números inteiros consecutivos de que fala o enunciado, temos: $n + n + 1 = 2142 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2n + 1 = 2142 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2n = 2141 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n = 1070{,}5$ Verificação: $1070{,}5 + 1070{,}5 + 1 = 2142$ A solução da equação é 1070,5, mas esse número não é inteiro, logo o problema não tem solução.
Razões que levaram a colocar esta questão
O interesse desta questão está em trabalhar o caso de impossibilidade. Os alunos chegarão a um valor decimal, sendo que no enunciado fala de dois números inteiros consecutivos. Outro ponto que é importante no trabalho desenvolvido nesta alínea prende-se com o significado que é dado à

incógnita, e com a compreensão da diferença entre a solução da equação e a resposta final.	
Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la; • O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”;
• Os alunos não conseguem resolver a equação.	• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;
• Apesar de terem chegado à solução da equação, os alunos não conseguem compreender o significado do valor que descobriram.	• O professor deve relembrar o enunciado e voltar a questionar o que significa a incógnita. O professor deve também clarificar a diferença existente entre a solução da equação e a resposta, esclarecendo algumas questões que possam surgir entre uma equação impossível e um problema que não tem solução.

Tarefa
2.4. A soma de três números pares consecutivos é 246. Quais são os números?
Nesta alínea, os alunos terão de voltar a dar uma grande atenção ao significado que irão atribuir à incógnita. De seguida, os alunos têm de resolver a equação a que chegarem, tendo o cuidado no final com a resposta, pois deve ser o par que encontrarem com a sua equação e os dois seguintes.
Possíveis resoluções: a) Equações: Definindo uma variável “n” como sendo o enésimo par (sendo este o primeiro deles) de que fala o enunciado, temos: $2n + 2 \times (n + 1) + 2 \times (n + 2) = 246 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 246 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6n + 6 = 246 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow 6n = 240 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow n = 40$$ Verificação: $$2 \times 40 + 2 \times (40 + 1) + 2 \times (40 + 2) = 80 + 82 + 84 = 246$$ $$ou$$ Definindo uma variável “n” como sendo o primeiro dos números pares consecutivos de que fala o enunciado, temos: $$n + n + 2 + n + 4 = 246 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow 3n + 6 = 246 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow 3n = 240 \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow n = 80$$ Verificação: $$80 + 82 + 84 = 246$$ Os números são o 80, o 82 e o 84.	
Razões que levaram a colocar esta questão	
Com esta alínea os alunos poderão trabalhar a definição dos significados da incógnita, bem como a compreensão da resposta que deve ser dada. Devem ter o cuidado com os valores a que chegam, podendo facilmente fazer uma verificação dos resultados obtidos. O facto de haver mais que uma forma de resolução, pode também vir a tornar-se importante no momento de discussão coletiva, podendo notar-se que significados de incógnitas diferentes levam a soluções de equações diferentes, mas ainda assim deverão chegar a respostas de problema iguais	
Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la; • O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”;
• Os alunos não conseguem resolver a equação.	• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;
• Apesar de terem chegado à solução da equação, os alunos não conseguem compreender o	• O professor deve relembrar o enunciado e voltar a questionar o que significa a incógnita. O

significado do valor que descobriram, deixando a resposta ao problema em branco.	professor deve também clarificar a diferença existente entre a solução da equação e a resposta.

Momento de Aula: Introdução da tarefa – As Idades

Tempo: 5 minutos

O professor deve entregar a nova tarefa aos alunos, para que seja feita uma breve leitura da mesma, de forma a esclarecer qualquer dúvida que surja, para que o novo trabalho autónomo seja rapidamente por todos os pares de alunos. De seguida serão informados que terão até ao final da aula para a resolução da tarefa, sendo que a levariam posteriormente para casa, podendo ser um trabalho a desenvolver como forma de estudo para o Mini-Teste do dia seguinte.

Momento de Aula: Trabalho Autónomo

Tempo: 35 minutos

Tarefa	
1. Sabendo que o Marco é mais velho 12 anos do que o seu irmão, e que a soma das idades dos dois é de 22 anos, qual é a idade do Marco? 1.1. Traduzam o problema por meio de uma equação. 	
Nesta alínea os alunos têm de fazer uma tradução algébrica do problema que lhes é colocado.	
Possíveis resoluções: a) $(x + 12) + x = 22$ b) $y + (y - 12) = 22$	
Razões que levaram a colocar esta questão	
Esta alínea é interessante, pois o facto de haver duas equações diferentes, poderá fazer com que no momento de discussão coletiva surja um debate sobre os dois métodos, tornando assim mais clara a importância da definição da incógnita.	
Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la; • O professor deve auxiliar os alunos nessa atividade com

	questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”.

Tarefa	
1.2. Indiquem o significado da incógnita que escolheram.	
Nesta alínea, os alunos deverão definir a sua incógnita, consoante a sua resolução da alínea anterior.	
Possíveis resoluções: a) A incógnita x corresponde à idade do irmão do Marco. b) A incógnita y corresponde à idade do Marco.	
Razões que levaram a colocar esta questão	
Através desta alínea, o grande debate que poderá surgir na resolução da questão 1.1 torna-se mais claro, pois é explicada a diferença existente entre as duas equações.	
Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la; • O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – “O que temos?”, “O que queremos descobrir?” e “Como podemos fazê-lo?”, “O que é a incógnita que colocaram na alínea anterior? O que significa?”

Tarefa

1.3. Resolvam a equação.

Nesta alínea, os alunos deverão utilizar os seus conhecimentos dos princípios de equivalência, de forma a conseguirem encontrar o valor que faz com que a equação seja verdadeira.

Possíveis resoluções:

a)

$$(x+12)+x=22 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=22-12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=5$$

b)

$$y+(y-12)=22 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2y = 22 + 12 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2y = 34 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = 17$
Razões que levaram a colocar esta questão
Esta alínea é importante para voltar a tornar saliente que apesar de duas equações diferentes, e com resultados diferentes, chega-se sempre ao mesmo resultado da pergunta, algo que é demonstrado na alínea seguinte. Também o facto de voltares a utilizar os princípios de equivalência para conseguirem resolver a equação é uma atividade interessante e que permite esclarecer algumas dúvidas que ainda subsistam.

Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não conseguem resolver a equação.	• Compreender a questão, e resolvê-la; • O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;

Tarefa
1.4. Qual é a idade do Marco?
Nesta alínea, os alunos devem apenas responder à questão que lhes é feita, tendo em conta o significado da incógnita que assumiram, e a solução que encontraram para a mesma.
Possíveis resoluções: a) $(x + 12) = 5 + 12 = 17$ b) $y = 17$ O Marco tem 17 anos de idade.
Razões que levaram a colocar esta questão
O interesse desta alínea foi já explicado na questão anterior, sendo que a importância da compreensão da diferente entre solução da equação e solução do problema, bem como do significado da incógnita assumida, torna-se algo muito explícito para os alunos. Dado que um dos pontos do Mini-Teste será a definição da incógnita, penso ser de relevo demonstrar a importância que lhe deve ser dada.

Dificuldades	**Estratégias**
	• Compreender a questão, e resolvê-la;

• Apesar de terem chegado à solução da equação, os alunos não conseguem compreender o significado do valor que descobriram, deixando a resposta ao problema em branco.	• O professor deve relembrar a importância que deve ser dada ao significado que atribuíram anteriormente à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – "O que acabámos de descobrir?", "Qual era o significado que tinham dado à incógnita?". Deve também clarificar a diferença existente entre a solução da equação e a resposta.

Tarefa
2. Quando a Alice fez 7 anos a sua mãe tinha 37. Qual será a soma das idades das suas idades quando a Alice tiver um terço dos anos da sua mãe? Apresentem todos os cálculos que efetuarem.
Nesta questão, os alunos terão um trabalho muito minucioso na definição da incógnita, pois é preciso dar-se muita atenção ao enunciado para o conseguir fazer corretamente. Também a equação que surge pode ser de mais difícil compreensão, o que faz com que seja uma boa tarefa tendo em vista o Mini-Teste do dia seguinte.
Possíveis resoluções: a) Equações: Definindo a incógnita "a" como sendo a quantidade de anos que falta para que a mãe da Alice tenha o triplo da sua idade: $3 \times (a + 7) = a + 37 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3a + 21 = a + 37 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a = 16 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = 8$ Idade da Alice: $7 + 8 = 15$ Idade da mãe da Alice: $37 + 8 = 45$ Soma das idades: $45 + 15 = 60$ R: A soma das suas idades quando a mãe da Alice tiver o triplo da sua idade será de 60 anos. b) Tentativa e Erro.
Razões que levaram a colocar esta questão
Esta questão vai ainda mais a fundo no que se trata da definição do significado da incógnita, e isso é algo muito importante de tornar claro para os alunos. Eles devem saber o que fazem, de onde partem e onde querem chegar, para que as suas aprendizagens sejam realmente significativas e

duradouras. Neste caso, os alunos acabam por dar um grande passo na compreensão e tradução algébrica de problemas.	
Dificuldades	**Estratégias**
• Os alunos não compreendem a questão.	• Compreender a questão, e resolvê-la; • O professor deve salientar a importância que deve ser dada ao significado que é atribuído à incógnita, auxiliando os alunos nessa atividade com questões como – "O que temos?", "O que queremos descobrir?" e "Como podemos fazê-lo?";
• Os alunos não conseguem resolver a equação.	• O professor pode utilizar os exemplos das balanças como vinha sendo feito até ao início do trabalho em torno das situações problemáticas. Fazendo referência às operações inversas, o professor pode conseguir facilitar a compreensão do primeiro passo na resolução da equação;
• Apesar de terem chegado à solução da equação, os alunos não conseguem compreender o significado do valor que descobriram, deixando a resposta ao problema em branco.	• O professor deve relembrar o enunciado e voltar a questionar o que significa a incógnita. O professor deve também clarificar a diferença existente entre a solução da equação e a resposta.

Momentos de Aula: Trabalho Autónomo.

Tempo: 30 + 35 minutos

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Mobilizar conhecimentos para resolver a Questão 1; • Debater com o seu par, de forma a encontrarem uma estratégia para resolverem a tarefa; • Em caso de dúvida, tentar esclarecer com o professor, para que consiga prosseguir na resolução da tarefa; • Analisar de forma crítica as suas respostas;	• Monitorizar o trabalho dos alunos, garantindo que estão a trabalhar a pares; • Tentar que todos os alunos estejam a conseguir fazer algumas das alíneas, para que todos consigam definir as suas estratégias de resolução; • Selecionar as resoluções que lhe pareçam mais importantes para a discussão coletiva.

Momentos de Aula: Discussão Coletiva.

Tempo: 20 min

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Analisar de forma crítica os resultados apresentados e comparar com os seus; • Participar construtivamente na discussão quando solicitado pelo professor; • Se achar que a sua resolução deve ser alvo de debate, então deve de expô-la ao professor; • Compreender as estratégias e resoluções que forem apresentadas, podendo assim definir novas metodologias de trabalho; • Caso surjam dúvidas, deve tentar esclarecê-las no momento, pois poderão ser também dúvidas dos colegas.	• Gerir as intervenções dos alunos, tentando abordar tanto as dificuldades, como as melhores estratégias de resolução que os alunos foram seguindo durante o momento de trabalho autónomo; • Garantir que todos os alunos compreendem as resoluções que estão a ser feitas no quadro; • Não validar as respostas dos alunos durante o momento de discussão, para que sejam eles a defender e a explicar as suas resoluções; • Caso os alunos não cheguem a alguma das estratégias que o professor ache importante, este deve de fazer questões, de maneira a que os alunos cheguem lá por si mesmos;

Avaliação

A avaliação será feita através de observação direta:

- Interesse, empenho e trabalho colaborativo, durante os momentos de trabalho autónomo;
- Participação e comunicação matemática (os alunos terão de justificar as suas respostas, sendo necessário que as suas ideias sejam claras para toda a turma, utilizando a linguagem matemática adequada a cada uma das resoluções).

No final da aula, serão recolhidas as resoluções da tarefa, para uma melhor análise das aprendizagens, das estratégias e das dificuldades que os alunos sentiram durante a aula.

A avaliação será reguladora, tendo por base uma avaliação formativa, pois o importante é que todos os alunos consigam atingir os objetivos traçados para a aula.

Aula 6 – 7 de abril de 2016

Plano de Aula – 07/04/2016

Tema: Resolução de Problemas – Equações do 1º Grau

Objetivos Específicos

- Resolução de problemas;
- Resolução do Mini-Teste.

Metodologia de Trabalho

- Trabalho a Pares

Capacidades Transversais

- Trabalho colaborativo;
- Descoberta;
- Autonomia;
- Autoconfiança;
- Comunicação Matemática;
- Espírito Crítico;
- Gosto pela matemática.
- Raciocínio matemático;
- Estabelecimento de conexões.

Recursos

- Tarefa – “As Idades”;
- Quadro Branco e Marcadores;
- Mini-Teste.

Momentos de Aula

- Discussão Coletiva (Q1 e Q2) – 20 min;
- Mini-Teste – 25 min.

Momentos de Aula: Discussão Coletiva.

Tempo: 20 min.

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Analisar de forma crítica os resultados apresentados e comparar com os seus; • Participar construtivamente na discussão quando solicitado pelo professor; • Se achar que a sua resolução deve ser alvo de debate, então deve de expô-la ao professor; • Compreender as estratégias e resoluções que forem apresentadas, podendo assim definir novas metodologias de trabalho; • Caso surjam dúvidas, deve tentar esclarecê-las no momento, pois poderão ser também dúvidas dos colegas.	• Gerir as intervenções dos alunos, tentando abordar tanto as dificuldades, como as melhores estratégias de resolução que os alunos foram seguindo durante o momento de trabalho autónomo; • Garantir que todos os alunos compreendem as resoluções que estão a ser feitas no quadro; • Não validar as respostas dos alunos durante o momento de discussão, para que sejam eles a defender e a explicar as suas resoluções; • Caso os alunos não cheguem a alguma das estratégias que o professor ache importante, este deve de fazer questões, de maneira a que os alunos cheguem lá por si mesmos;

Momentos de Aula: Mini-Teste.

Tempo: 25 min.

Papel do Aluno	Papel do Professor
• Mobilizar conhecimentos para resolver as questões do Mini-Teste; • Debater com o seu par, de forma a encontrarem uma estratégia para resolverem o Mini-Teste; • Analisar de forma crítica as suas respostas;	• Monitorizar o trabalho dos alunos, garantindo que estão a trabalhar simplesmente com o seu par; • Tentar que todos os alunos estejam a conseguir fazer algumas das alíneas, de forma a garantir que todos estão a compreender o que lhes é pedido no Mini-Teste

Avaliação

A avaliação será feita através de observação direta:

- Interesse, empenho e trabalho colaborativo, durante a resolução do Mini-Teste;
- Participação e comunicação matemática (os alunos terão de justificar as suas respostas, sendo necessário que as suas ideias sejam claras para toda a turma, utilizando a linguagem matemática adequada a cada uma das resoluções).

Também haverá uma avaliação sumativa e formativa através da resolução do Mini-Teste.

No final da aula, serão recolhidas as resoluções da tarefa, para uma melhor análise das aprendizagens, das estratégias e das dificuldades que os alunos sentiram durante a aula e na realização do trabalho de casa.

A avaliação será reguladora, tendo por base uma avaliação formativa, pois o importante é que todos os alunos consigam atingir os objetivos traçados para a aula.

Anexo 3 – Folhas de cálculos

Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:	Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:
Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:	Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:
Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:	Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:
Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:	Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:
Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:	Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:
Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:	Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:
Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:	Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $2 \times (\_\_\_\_\_ + 23) - 20 =$ Resultado Final:
Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $5 \times \_\_\_\_\_ + 15 =$ Resultado Final:	Número Escolhido: _____ Resolve a expressão, utilizando o número que escolheste: $5 \times \_\_\_\_\_ + 15 =$ Resultado Final: